Άσκηση $1^η$:

Μία αυτόματη μηχανή ανοίγει τρύπες σε κομμάτια ξύλου. Η διάμετρος των τρυπών κατανέμεται κανονικά με μέση διάμετρο 550 χιλιοστά και τυπική απόκλιση 1 χιλιοστό. Ποια η πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο κομμάτι ξύλου να έχει τρύπα η οποία είναι:

1. Μικρότερη των 550 χιλιοστών;
2. Μεταξύ 548 και 552 χιλιοστών;
3. Υπολογίστε τα δύο όρια μεταξύ των οποίων θα βρίσκεται το 99% των ξύλινων κομματιών.

Τρύπες που είναι πολύ μικρές θα τρυπηθούν ξανά, αλλά κομμάτια ξύλου με πολύ μεγάλες τρύπες θα αχρηστευθούν. Αν ο πελάτης θέλει 10.000 κομμάτια ξύλου με τρύπες μεταξύ 549 χιλιοστών και 551 χιλιοστών υπολογίστε:

4. Το πλήθος των ξύλινων κομματιών που θα τρυπηθούν ξανά και
5. Το πλήθος των ξύλινων κομματιών που θα αχρηστευθούν.

Λύση

1. $P(X<550)=P(Z<0)=\Phi(0)=(0+0,5)=0,5=50\%$ $[Z=(550-550)/1=0)]$
2. $P(548\leq X\leq 552)=P(X\leq 552)-P(X\leq 548)=P(Z\leq 2)-P(Z\leq -2)=\Phi(2)-\Phi(-2)=$
   $=\Phi(2)-[1-\Phi(2)]=2\Phi(2)-1=2(0,4772+0,5)-1=0,9544=95,44\%$
   $[Z_1=(552-550)/1=2,\quad Z_2=(548-550)/1=-2]$
3. Έστω X_1 και X_2 τα όρια μεταξύ των οποίων θα βρίσκεται το 99% των ξύλινων κομματιών.
   Ισχύει επομένως η σχέση: $P(X_1\leq X\leq X_2)=0,99$
   $P(X\leq X_2)-P(X\leq X_1)=0,99$ $[Z_2=(X_2-550)/1>0\quad Z_1=(X_1-550)/1<0]$
   $P(Z\leq Z_2)-P(Z\leq -Z_1)=0,99$ $P(Z\leq Z_2)-[1-P(Z\leq Z_1)=0,99$
   $P(Z\leq Z_2)+P(Z\leq Z_1)-1=0,99$ Επειδή $Z_2=Z_1$ θα έχουμε: $2P(Z\leq Z_2)=1,99$ και συνεπώς
   $P(Z\leq Z_2)=1,99/2=0,995$ Η Πιθανότητα 0,995-0,5=0,495 στους πίνακες αντιστοιχεί στην τιμή Z=2,575 και συνεπώς από τη σχέση (X2-550)/1=2,575 προκύπτει ότι η τιμή του X_2 είναι X2=552,575. Αντίστοιχα η τιμή του $X_1=550-2,575=547,425$
   !!!! Μπορούμε επίσης να θέσουμε: $P(X>X_2)+P(X<X_1)=0,01$
   Επειδή όμως X1, X2 είναι συμμετρικά θα έχουμε: $2P(X>X_2)=0,01$ και στη συνέχεια:
   $P(X>X_2)=0,01/2=0,005$ $1-P(X\leq X_2)=0,005$ $P(X\leq X_2)=1-0,05=0,995$
   Άρα $(X_2-550)/1=2,575$ από τους πίνακες. Στη συνέχεια υπολογίζεται εύκολα ότι $X_2=552,575$ και $X_1=550-2,575=547,425$

4. Τα ξύλινα κομμάτια με τρύπες μικρότερες των 549 χιλιοστών θα τρυπηθούν ξανά. Ζητούμε επομένως την πιθανότητα: $P(X<549)$ επειδή $Z=(549-550)/1=-1$

   θα έχουμε $P(X<449)=P(Z<-1)=\Phi(-1)=1-\Phi(1)=1-(0,3413+0,5)=0,1587=15,87\%$

   Συνεπώς θα τρυπηθούν ξανά 10.000*0,1587=1587 κομμάτια ξύλου.

5. Τα ξύλινα κομμάτια με τρύπες μεγαλύτερες των 551 χιλιοστών θα αχρηστευθούν. ξανά. Ζητούμε επομένως την πιθανότητα: $P(X>551)= P(X<549)$ Συνεπώς θα αχρηστευθούν 1587 κομμάτια ξύλου.

Άσκηση 2^{η}:

Βιομηχανία συσκευασίας ζάχαρης σε χάρτινα σακίδια, έλαβε από μεγάλο σούπερ μάρκετ παραγγελία 750.000 σακιδίων βάρους 1.000 gr. Πόσα σακίδια πρέπει να συσκευάσει για να είναι συνεπής στον πελάτη αν κάθε σακίδιο βάρους μεγαλύτερου των 1010 gr ή μικρότερου των 990 gr θεωρείται ελαττωματικό και αντικαθίσταται; Από προηγούμενη εμπειρία είναι γνωστό ότι η τυπική απόκλιση είναι 5 gr.

Λύση

Πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την πιθανότητα: $P(X>1010)+P(X<990)$

Έχουμε $Z1=(1010-1000)5=2$ και $Z2=(990-1000)/5=-2$

$P(X>1010)+P(X<990)=P(Z>2)+P(Z<-2)=1-P(Z\leq 2)+P(Z<-2)=1-\Phi(2)+\Phi(-2)=$

$=1-\Phi(2)+1-\Phi(2)=2-2\Phi(2)=2[1-\Phi(2)]=2[1-(0,4772+0,5)]=2(0,0228)=0,0456=4,56\%$.

Έστω χ η ποσότητα που πρέπει να συσκευάσει η βιομηχανία έτσι ώστε όταν απορριφτεί το 4,56% αυτών ως ελαττωματικά να πρέπει για να παραδώσει 750.000 μη ελαττωματικά.

$X-0,0456*X=750.000$ $0,9544*X=750.000$ $X=785.834$ σακίδια.