



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

DEMOCRITUS
UNIVERSITY
OF THRACE

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης



Τμήμα Διοικητικής Επιστήμης και Τεχνολογίας

Μεταπτυχιακό στη Διοίκηση Επιχειρήσεων και Οργανισμών
για Στελέχη- Executive MBA

Διοίκηση Έργου Project Management

Dr. Efstathios Dimitriadis
Mathematic
Ph.D in Applied Statistics
M.Sc in Statistics and Demography
M.Sc in Quality Assurance

Καβάλα, 2025

5.3. Μέθοδος Κρίσιμης Διαδρομής

Critical Path Method- CPM

Γ. Μέθοδος Κρίσιμης Διαδρομής (Critical Path Method- CPM)

Αναπτύχθηκε το 1957 από τους Kelly και Walker για να βοηθήσει στην κατασκευή και τη συντήρηση εργοστασίων χημικών προϊόντων.

Μια τεχνική διαχείρισης έργων, που καθορίζει όλες τις δραστηριότητες που απαιτούνται για να ολοκληρωθεί μια εργασία, τον χρόνο που θα χρειαστεί για την ολοκλήρωση κάθε δραστηριότητας και τις σχέσεις μεταξύ των δραστηριοτήτων.

Χρησιμοποιείται σε σχέδια σύνθετων έργων με μεγάλο πλήθος δραστηριοτήτων.

C.P.M

Η *Μέθοδος Κρίσιμης Διαδρομής (Critical Path Method)* είναι ένας μαθηματικός αλγόριθμος για τον προγραμματισμό μιας σειράς δραστηριοτήτων των έργων.

Είναι ένα σημαντικό εργαλείο για την αποτελεσματική διαχείριση του έργου.

Συνήθως χρησιμοποιείται σε όλες τις μορφές των έργων, συμπεριλαμβανομένων των κατασκευών, της ανάπτυξης λογισμικού, των ερευνητικών προγραμμάτων, της τεχνολογίας.

Κάθε έργο με αλληλεξαρτώμενες δραστηριότητες μπορεί να εφαρμόσει αυτή τη μέθοδο προγραμματισμού.

Πλεονεκτήματα C.P.M

Η **C.P.M** προσφέρει τα παρακάτω πλεονεκτήματα:

1. Παρέχει μια γραφική απεικόνιση του έργου
2. Προβλέπει το χρόνο που απαιτείται για την ολοκλήρωση του έργου
3. Δείχνει ποιες δραστηριότητες είναι κρίσιμες για τη διατήρηση του προγράμματος και ποιες δεν είναι.

Βήματα στην διαδικασία CPM

1. Καθορίστε τις επιμέρους δραστηριότητες.
2. Καθορίστε την ακολουθία αυτών των δραστηριοτήτων.
3. Σχεδιάστε ένα διάγραμμα δικτύου.
4. Εκτιμήστε τον χρόνο ολοκλήρωσης κάθε δραστηριότητας.
5. Προσδιορίστε την κρίσιμη διαδρομή (η μακρύτερη διαδρομή μέσα στο δίκτυο).
6. Ενημερώστε το διάγραμμα CPM, καθώς το έργο εξελίσσεται.

1. Καθορίστε τις επιμέρους δραστηριότητες.

Από την δομή ανάλυσης εργασιών, μπορεί να δημιουργηθεί μια λίστα με όλες τις δραστηριότητες του έργου. Αυτή η λίστα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση για την προσθήκη αλληλουχιών και πληροφοριών για την διάρκεια, σε επόμενα βήματα.

2. Καθορίστε την ακολουθία αυτών των δραστηριοτήτων.

Ορισμένες δραστηριότητες εξαρτώνται από την ολοκλήρωση άλλων. Είναι χρήσιμη μια λίστα των άμεσων προαπαιτούμενων της κάθε δραστηριότητας για την κατασκευή του διαγράμματος δικτύου CPM.

3. Σχεδιάστε ένα διάγραμμα δικτύου.

Μόλις οι δραστηριότητες και οι αλληλουχίες τους έχουν οριστεί, μπορεί να δημιουργηθεί το διάγραμμα CPM. Η CPM αρχικά αναπτύχθηκε ως μια δραστηριότητα επί του κόμβου, ωστόσο ορισμένοι διαχειριστές έργου προτιμούν να προσδιορίζουν τις δραστηριότητες επί του τόξου.

4. Εκτιμήστε τον χρόνο ολοκλήρωσης κάθε δραστηριότητας.

Ο χρόνος που απαιτείται για την ολοκλήρωση κάθε δραστηριότητας μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την εμπειρία του παρελθόντος ή τις εκτιμήσεις ατόμων που γνωρίζουν. Η CPM είναι ένα **αιτιοκρατικό μοντέλο (deterministic model)** που δεν λαμβάνει υπόψη τη μεταβολή στο χρόνο ολοκλήρωσης και έτσι μόνο ένας αριθμός χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του χρόνου μιας δραστηριότητας.

5. Προσδιορίστε την κρίσιμη διαδρομή –Critical Path (η μακρύτερη διαδρομή μέσα στο δίκτυο).

Η κρίσιμη διαδρομή είναι η διαδρομή με τη μεγαλύτερη διάρκεια μέσω του δικτύου. Η σημασία της κρίσιμης διαδρομής είναι ότι οι δραστηριότητες που βρίσκονται σε αυτή δεν μπορεί να καθυστερήσουν χωρίς να καθυστερήσει το έργο. Λόγω των επιπτώσεων της στο σύνολο του έργου, η ανάλυση κρίσιμης διαδρομής είναι μια σημαντική πτυχή του σχεδιασμού του έργου.

6. Ενημερώστε το διάγραμμα CPM, καθώς το έργο εξελίσσεται.

Καθώς εξελίσσεται το έργο, γίνονται γνωστοί οι χρόνοι πραγματικής ολοκλήρωσης των εργασιών και πρέπει να ενημερωθεί το διάγραμμα δικτύου για να συμπεριλάβει αυτές τις πληροφορίες. Μπορεί να προκύψει μια νέα κρίσιμη διαδρομή και μπορούν να γίνουν οι διαρθρωτικές αλλαγές στο δίκτυο εάν έχουν αλλάξει απαιτήσεις του έργου.

5.4. Τεχνική Αποτίμησης και Αναθεώρησης Προγράμματος

Program Evaluation and Review Technique -PERT

Δ. Τεχνική Αποτίμησης και Αναθεώρησης Προγράμματος Program Evaluation and Review Technique -PERT

Η **PERT** αρχικά αναπτύχθηκε το 1958 και το 1959 με σκοπό να ικανοποιήσει τις μεγάλες ανάγκες τις οποίες δημιούργησε η ραγδαία ανάπτυξη της μηχανικής. Το Γραφείο Ειδικών Έργων του Πολεμικού Ναυτικού των Η.Π.Α εισήγαγε για πρώτη φορά την PERT στην ανάπτυξη του οπλικού συστήματος πυραύλων Polaris το 1958. Η τεχνική αναπτύχθηκε από την εταιρεία Booz, Allen & Hamilton η οποία παρείχε συμβουλευτικές υπηρεσίες διοίκησης έργων. Έκτοτε εξαπλώθηκε ευρέως σε όλους σχεδόν τους βιομηχανικούς κλάδους.

Η μέθοδος **PERT** Είναι ένα εργαλείο διαχείρισης έργου που χρησιμοποιείται για τον προγραμματισμό, την οργάνωση και το συντονισμό των εργασιών μέσα στο έργο. Πρόκειται ουσιαστικά για μια μέθοδο ανάλυσης των καθηκόντων που εμπλέκονται στην ολοκλήρωση ενός συγκεκριμένου σχεδίου, ιδιαίτερα του χρόνου που απαιτείται για την ολοκλήρωση κάθε έργου, καθώς και για του προσδιορισμού του ελάχιστου χρόνου που απαιτείται για να ολοκληρωθεί το σύνολο του έργου.

Η **PERT** είναι μια παραλλαγή της μεθόδου της κρίσιμης διαδρομής που έχει μια διαφορετική εκτίμηση του χρόνου σε κάθε στάδιο του έργου. Για να χρησιμοποιηθεί, εκτιμάται το **συντομότερο** δυνατό χρονικό διάστημα που απαιτεί η κάθε δραστηριότητα, το **πιο πιθανό** χρονικό διάστημα και το **μεγαλύτερο** χρονικό διάστημα που απαιτεί η δραστηριότητα.

Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της **PERT** είναι η ικανότητά του να ασχοληθεί με την αβεβαιότητα στο χρόνο ολοκλήρωσης της δραστηριότητας. Για κάθε δραστηριότητα, το μοντέλο συνήθως περιλαμβάνει τρεις χρονικές εκτιμήσεις:

1. Αισιόδοξος Χρόνος (optimistic a)

Γενικά ο μικρότερος χρόνος στον οποίο μπορεί να ολοκληρωθεί η δραστηριότητα. Είναι κοινή πρακτική να καθορίζεται ο αισιόδοξος χρόνος έτσι, ώστε να απέχει τρεις τυπικές αποκλίσεις από την μέση τιμή και να έχει 1% πιθανότητα να ολοκληρωθεί η δραστηριότητα εντός του αισιόδοξου χρόνου.

2. Ο πιθανότερος χρόνος (most likely m)

Είναι ο χρόνος ολοκλήρωσης με την μεγαλύτερη πιθανότητα. Ο χρόνος αυτός είναι διαφορετικός από τον αναμενόμενο χρόνο.

3. Απαισιόδοξος Χρόνος (pessimistic b)

Γενικά, είναι ο μεγαλύτερος χρόνος στον οποίο μπορεί να ολοκληρωθεί η δραστηριότητα. Συνήθως χρησιμοποιούνται τρεις τυπικές αποκλίσεις από την μέση τιμή για τον απαισιόδοξο χρόνο.

Η **PERT**, σε αντίθεση με την **C.P.M** είναι **στοχαστικό μοντέλο** (*stochastic model*) που χρησιμοποιεί την κατανομή **Beta** για την εκτίμηση του χρόνου.

Για την κατανομή **Beta**, ο αναμενόμενος χρόνος για κάθε δραστηριότητα μπορεί να προσεγγιστεί χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο σταθμισμένο μέσο:

Αναμενόμενος ή μέσος χρόνος:

$$\mu = (\text{αισιόδοξος} + 4 * \text{πιθανότερος} + \text{απαισιόδοξος}) / 6$$

$$\mu = \frac{(a + 4 * m + b)}{6}$$

Η διακύμανση του χρόνου ολοκλήρωσης κάθε δραστηριότητας δίνεται από τη σχέση: $\sigma^2 = [(\text{απαισιόδοξος} - \text{αισιόδοξος}) / 6]^2$

$$\sigma^2 = \left(\frac{b - a}{6} \right)^2$$

Ο χρόνος ολοκλήρωσης του έργου συνολικά είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή, ανεξάρτητα από την μορφή της κατανομής του χρόνου ολοκλήρωσης των επιμέρους δραστηριοτήτων, με μέση τιμή (μ) το άθροισμα των μέσων τιμών των χρόνων ολοκλήρωσης των κρίσιμων δραστηριοτήτων (ij) που την αποτελούν και μεταβλητότητα (σ^2) το άθροισμα των μεταβλητοτήτων τους.

$$\mu = \sum \mu_{ij}$$

$$\sigma^2 = \sum \sigma^2_{ij}$$

μ_{ij} και σ^2_{ij} : Δραστηριότητες που ανήκουν στην κρίσιμη διαδρομή

PERT και CPM

Είναι δύο δημοφιλείς τεχνικές της επιστήμης της διαχείρισης που βοηθούν τους διαχειριστές να σχεδιάζουν, να προγραμματίζουν, να παρακολουθούν και να ελέγχουν έργα μεγάλης κλίμακας και σύνθετα.

Διαφορές μεταξύ PERT και CPM

CPM	PERT
<ul style="list-style-type: none">Χρησιμοποιεί δίκτυο προσανατολισμένης δραστηριότητας	<ul style="list-style-type: none">Χρησιμοποιεί δίκτυο προσανατολισμένου γεγονότος
<ul style="list-style-type: none">Η διάρκεια ισχύος των δραστηριοτήτων μπορεί να εκτιμηθεί με ικανοποιητικό βαθμό ακρίβειας.	<ul style="list-style-type: none">Η Εκτίμηση του χρόνου των δραστηριοτήτων δεν είναι τόσο ακριβής και σαφής.
<ul style="list-style-type: none">Χρησιμοποιείται ευρέως στην κατασκευή έργων.	<ul style="list-style-type: none">Χρησιμοποιείται κυρίως σε έργα έρευνας και ανάπτυξης, ιδιαίτερα έργα μη επαναλαμβανόμενου χαρακτήρα.
<ul style="list-style-type: none">Χρησιμοποιείται ντετερμινιστική αντίληψη.	<ul style="list-style-type: none">Χρησιμοποιείται Πιθανοτικό μοντέλο.
<ul style="list-style-type: none">Η CPM μπορεί να ελέγξει τόσο τον χρόνο όσο και το κόστος κατά το σχεδιασμό.	<ul style="list-style-type: none">Η PERT είναι βασικά ένα εργαλείο για το σχεδιασμό.
<ul style="list-style-type: none">Στη CPM, δίνεται πρωταρχική σημασία στην βελτιστοποίηση του κόστους. Ο χρόνος για την ολοκλήρωση του έργου εξαρτάται από την βελτιστοποίηση του κόστους. Το κόστος δεν είναι ευθέως ανάλογο προς το χρόνο. Έτσι, το κόστος είναι ο παράγων ελέγχου.	<ul style="list-style-type: none">Στην PERT υποτίθεται ότι το κόστος μεταβάλλεται άμεσα με το χρόνο. Κατά συνέπεια δίνεται προσοχή στην ελαχιστοποίηση του χρόνου, έτσι ώστε τα προκύψει ελάχιστο κόστος. Έτσι στην PERT, ο χρόνος είναι ο παράγων ελέγχου.

Χαρακτηριστικά Αριθμητικά Μεγέθη

5.5.1 Χαρακτηριστικά Αριθμητικά Μεγέθη Γεγονότων σε Τοξωτά Δίκτυα



Χαρακτηριστικά Αριθμητικά Μεγέθη Γεγονότων/1 Τοξωτά Δίκτυα

1. Συντομότερος χρόνος του γεγονότος i (Earliest time- ET)

Ο ελάχιστος χρόνος από την έναρξη του έργου, στον οποίο μπορεί να συμβεί το γεγονός i . ($i = 1, 2, 3, \dots, n$)

Συμβολίζεται με $ET(i)$ και για το πρώτο γεγονός έναρξης του έργου ισχύει: $ET(1) = 0$.

Γενικά ο υπολογισμός του συντομότερου χρόνου δίδεται από τη σχέση: $ET(i) = \max\{ET(k) + t(ki)\}$

για κάθε $k \in P$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ και $ET(1) = 0$

P : το σύνολο των γεγονότων που προηγούνται του γεγονότος i και συνδέονται άμεσα με αυτό

$t(ki)$: η διάρκεια της δραστηριότητας με γεγονός έναρξης το γεγονός k και λήξης το γεγονός i .

Χαρακτηριστικά Αριθμητικά Μεγέθη Γεγονότων/2 Τοξωτά Δίκτυα

2. Βραδύτερος χρόνος του γεγονότος i (Latest time- LT)

Ο μέγιστος χρόνος από την έναρξη του έργου, μέχρι τον οποίο επιτρέπεται να συμβεί το γεγονός i . ($i = 1, 2, 3, \dots, n$)

Συμβολίζεται με $LT(i)$ και ξεκινά από το γεγονός λήξης του έργου για το οποίο ισχύει: $LT(n) = ET(n)$.

Γενικά ο υπολογισμός του βραδύτερου χρόνου δίδεται από τη σχέση: $LT(i) = \min\{LT(k) - t(ki)\}$

για κάθε $k \in S$, $i = n, n-1, n-2, \dots, 1$. και $LT(n) = ET(n)$

S : το σύνολο των γεγονότων που έπονται του γεγονότος i και συνδέονται άμεσα με αυτό

$t(ki)$: η διάρκεια της δραστηριότητας με γεγονός έναρξης το γεγονός k και λήξης το γεγονός i .

Χαρακτηριστικά Αριθμητικά Μεγέθη Γεγονότων/3 Τοξωτά Δίκτυα

3. Χρονικό περιθώριο του γεγονότος i (Event Slack- ES)

Η διαφορά μεταξύ του βραδύτερου και του συντομότερου χρόνου του γεγονότος i . ($i = 1, 2, 3, \dots, n$)

Συμβολίζεται με $ES(i)$ και υπολογίζεται από τη σχέση:

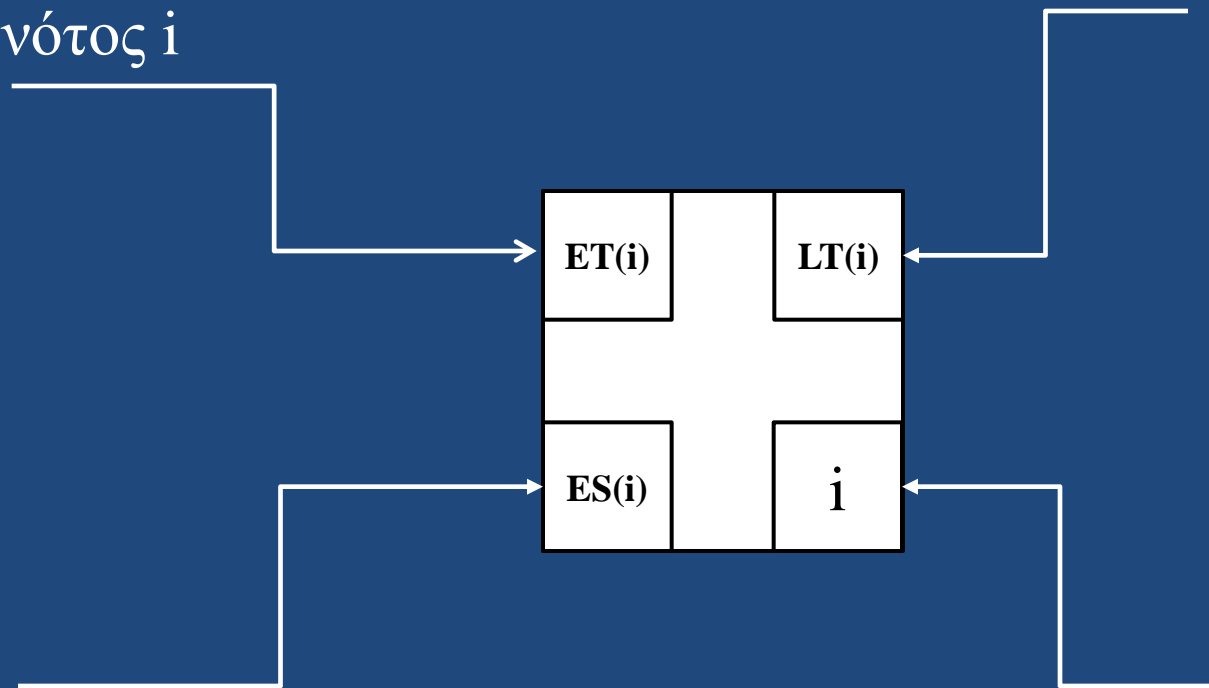
$$ES(i) = LT(i) - ET(i) \quad \text{με } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

όπου n το σύνολο των γεγονότων του έργου.

Το χρονικό περιθώριο του γεγονότος i είναι στην πραγματικότητα ίσο με το χρονικό διάστημα μέχρι το οποίο επιτρέπεται να καθυστερήσει να συμβεί το γεγονός που μας απασχολεί, από τον συντομότερο χρόνο του, χωρίς η καθυστέρηση αυτή να επηρεάσει την συντομότερη διάρκεια ολοκλήρωσης του έργου συνολικά.

Συντομότερος χρόνος
του γεγονότος i

Βραδύτερος χρόνος
του γεγονότος i

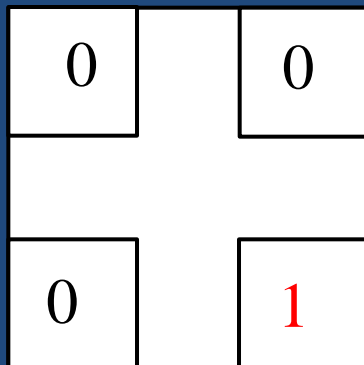


Χρονικό περιθώριο
του γεγονότος i

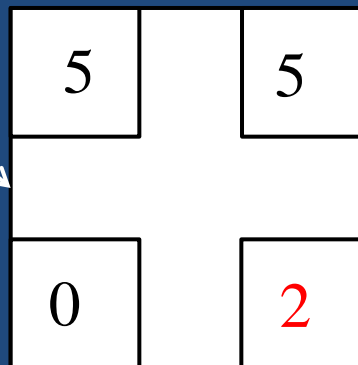
α/α του γεγονότος i

Χαρακτηριστικά Αριθμητικά Μεγέθη Γεγονότων σε Τοξωτά Δίκτυα

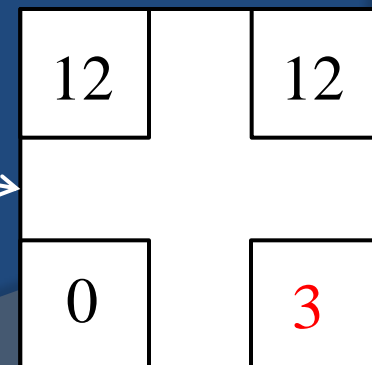
Α. Υπολογισμός ET, LT και ES



A(5)



B(7)



Όταν ένα γεγονός ορίζεται από ένα μόνο άλλο γεγονός, τότε ισχύει:

$$ET(2) = ET(1) + t(1,2)$$

$$LT(3) = ET(3)$$

$$LT(2) = LT(3) - t(2,3)$$

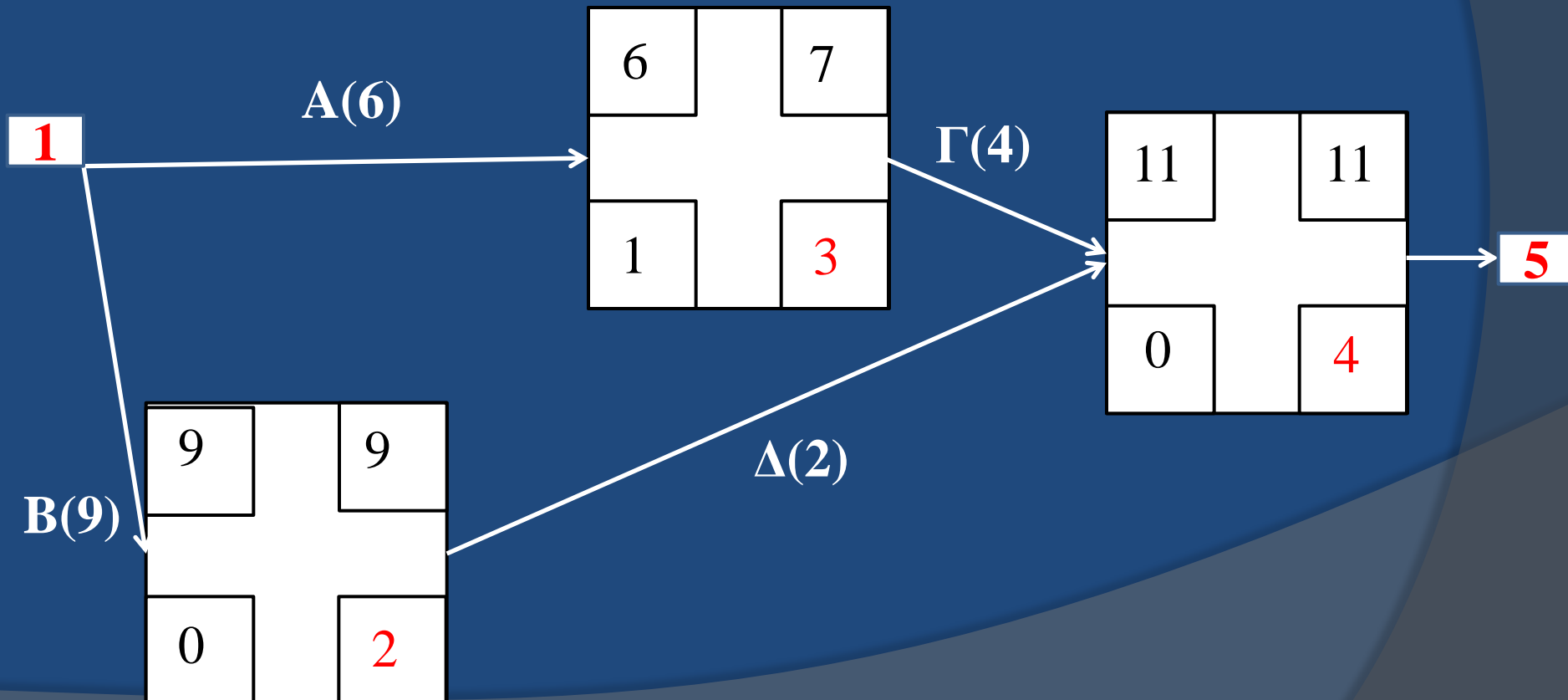
Χαρακτηριστικά Αριθμητικά Μεγέθη Γεγονότων σε Τοξωτά Δίκτυα

A. Υπολογισμός ET, LT και ES

Όταν ένα γεγονός ορίζεται από περισσότερα από ένα γεγονότα, τότε ισχύει:

$$ET(4) = \max[ET(3) + t(3,4) \text{ και } ET(2) + t(2,4)]$$

$$LT(2) = LT(4) - t(2,4) \quad LT(3) = LT(4) - t(3,4)$$



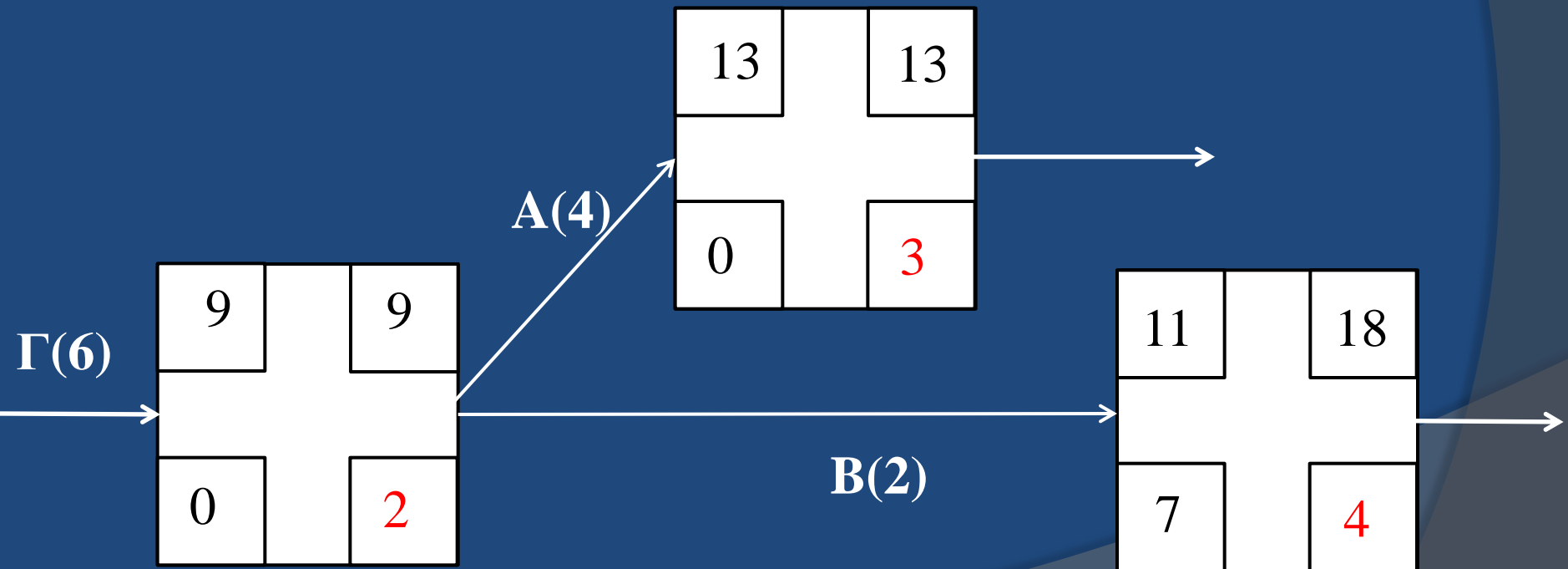
Χαρακτηριστικά Αριθμητικά Μεγέθη Γεγονότων σε Τοξωτά Δίκτυα

A. Υπολογισμός ET, LT και ES

Όταν ένα γεγονός ορίζει περισσότερα από ένα γεγονότα, τότε ισχύει:

$$ET(3)=ET(2)+t(2,3) \quad ET(4)=ET(2)+t(2,4)$$

$$LT(2)=\min[LT(3)-t(2,3) \text{ και } LT(4)-t(2,4)]$$



5.6. Χαρακτηριστικά Αριθμητικά Μεγέθη Δραστηριοτήτων σε Τοξωτά και Κομβικά Δίκτυα



Χαρακτηριστικά Αριθμητικά Μεγέθη Δραστηριοτήτων/1 Τοξωτά Δίκτυα

1. Νωρίτερη έναρξη της δραστηριότητας ij (Early Start- ES)

Ο ελάχιστος χρόνος από την έναρξη του έργου, στον οποίο μπορεί να ξεκινήσει η δραστηριότητα ij η οποία ορίζεται από το γεγονός έναρξης i και το γεγονός λήξης j .

Συμβολίζεται με $ES(ij)$ και ισχύει: $ES(ij) = ET(i)$

2. Νωρίτερη λήξη της δραστηριότητας ij (Early Finish-EF)

Ο ελάχιστος χρόνος από την έναρξη του έργου, στον οποίο μπορεί να ολοκληρωθεί η δραστηριότητα ij .

Συμβολίζεται με $EF(ij)$ και ισχύει: $EF(ij) = ES(ij) + t(ij) = ET(i) + t(ij)$

Χαρακτηριστικά Αριθμητικά Μεγέθη Δραστηριοτήτων/2 Τοξωτά Δίκτυα

3. Αργότερη λήξη της δραστηριότητας ij (Late Finish- LF)

Ο μέγιστος χρόνος από την έναρξη του έργου, μέχρι τον οποίο μπορεί να ολοκληρωθεί η δραστηριότητα, χωρίς να καθυστερήσει η διάρκεια ολοκλήρωσης του έργου συνολικά.

Συμβολίζεται με $LF(ij)$ και ισχύει: $LF(ij) = LT(j)$

4. Αργότερη έναρξη της δραστηριότητας ij (Late Start- LS)

Ο μέγιστος χρόνος από την έναρξη του έργου, μέχρι τον οποίο μπορεί να ξεκινήσει η δραστηριότητα, χωρίς να καθυστερήσει η διάρκεια ολοκλήρωσης του έργου συνολικά.

Συμβολίζεται με $LS(ij)$ και ισχύει: $LS(ij) = LF(ij) - t(ij) = LT(j) - t(ij)$

Χαρακτηριστικά Αριθμητικά Μεγέθη Δραστηριοτήτων/3 Τοξωτά Δίκτυα

5. Συνολικό Χρονικό Περιθώριο Δραστηριότητας - Slack Time (ST)

Το χρονικό διάστημα μέχρι το οποίο η δραστηριότητα επιτρέπεται να καθυστερήσει επιπλέον της χρονικής της διάρκειας, χωρίς όμως αυτό να προκαλέσει καθυστέρηση στην διάρκεια ολοκλήρωσης του έργου συνολικά.

Χρονικό Περιθώριο:

Αργότερη έναρξη- Νωρίτερη έναρξη

Αργότερη λήξη- Νωρίτερη λήξη

$$ST(ij) = LS(ij) - ES(ij) = LF(ij) - EF(ij)$$

Χαρακτηριστικά Αριθμητικά Μεγέθη Δραστηριοτήτων Τοξωτά Δίκτυα Σύνοψη

ES	t	EF
IDA		
LS		LF

Νωρίτερη Έναρξη: $ES(ij) = ET(i)$

Νωρίτερη Λήξη: $EF(ij) = ES(ij) + t(ij) = ET(i) + t(ij)$

Αργότερη Έναρξη: $LS(ij) = LF(ij) - t(ij) = LT(j) - t(ij)$

Αργότερη Λήξη: $LF(ij) = LT(j)$

Κωδικός Δραστηριότητας: IDA

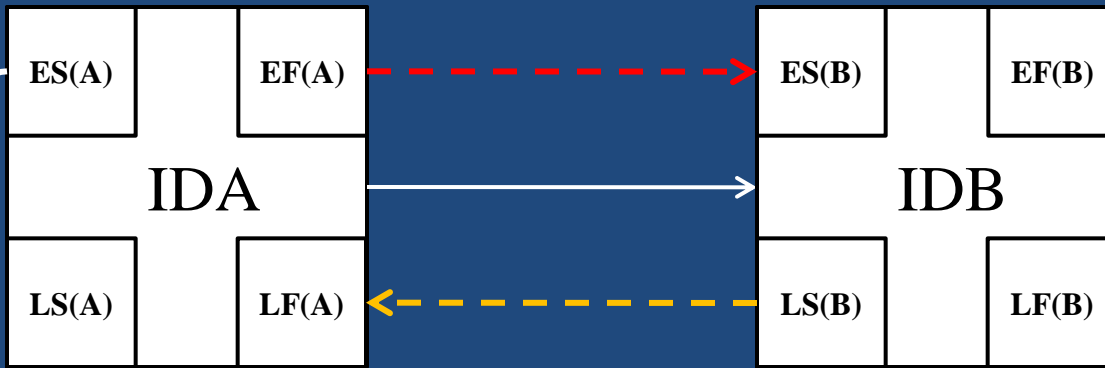
t : Διάρκεια

Συνολικό Χρονικό Περιθώριο Δραστηριότητας: Slack Time (ST)

Χρονικό Περιθώριο: Αργότερη έναρξη- Νωρίτερη έναρξη

Αργότερη λήξη- Νωρίτερη λήξη

$$ST(ij) = LS(ij) - ES(ij) = LF(ij) - EF(ij)$$



!!! Σε περίπτωση κατά την οποία η διαδικασία B εξαρτάται και από άλλες εκτός της A, επιλέγουμε ως $ES(B)$ το μεγαλύτερο EF .

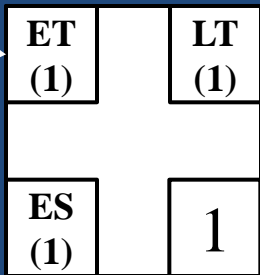
!!! Σε περίπτωση κατά την οποία από την διαδικασία A εξαρτώνται και άλλες εκτός της B, επιλέγουμε ως $LF(A)$ το μικρότερο LS .

$$EF(A) = ES(A) + t(A)$$

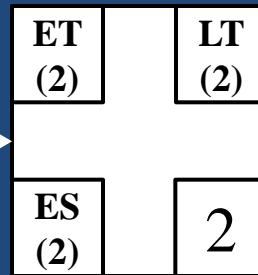
$$ES(B) = EF(A)$$

$$LS(B) = LF(B) - t(B)$$

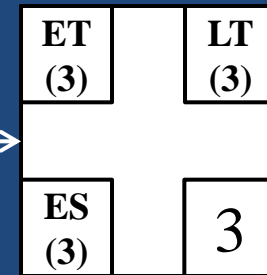
$$LF(A) = LS(B)$$



A



B



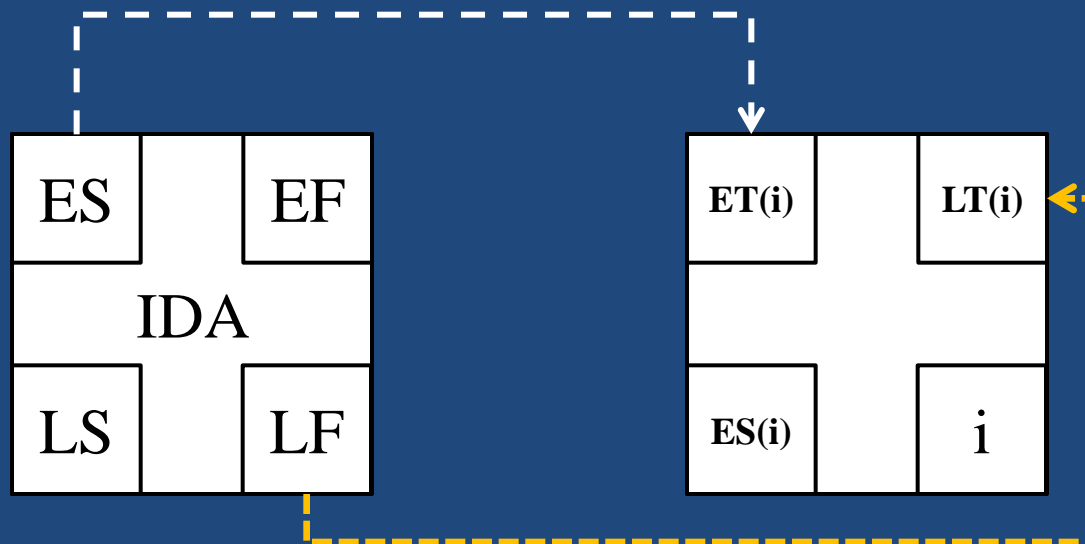
$$ES(A) = ES(1,2) = ET(1)$$

$$EF(A) = EF(1,2) = ES(1,2) + t(1,2) = ET(1) + t(1,2)$$

$$LF(B) = LF(2,3) = LT(3)$$

$$LS(B) = LS(2,3) = LF(2,3) - t(2,3) = LT(3) - t(2,3)$$

Αντιστοίχιση χαρακτηριστικών μεγεθών δραστηριοτήτων και γεγονότων



Χαρακτηριστικά Αριθμητικά Μεγέθη Δραστηριοτήτων Κομβικά Δίκτυα

Νωρίτερη Έναρξη (ES): Η μεγαλύτερη από τις *νωρίτερες λήξεις* όλων των δραστηριοτήτων που είναι προαπαιτούμενες της συγκεκριμένης δραστηριότητας (Είναι 0 για κάθε δραστηριότητα χωρίς προαπαιτούμενες)

Νωρίτερη Λήξη (EF):

$EF = ES + \text{Χρόνος ολοκλήρωσης της δραστηριότητας}$

Αργότερη Λήξη (LF): Η μικρότερη από τις *αργότερες ενάρξεις* των δραστηριοτήτων που ξεκινούν από την συγκεκριμένη δραστηριότητα. (Για την τελευταία δραστηριότητα είναι ο χρόνος ολοκλήρωσης του έργου).

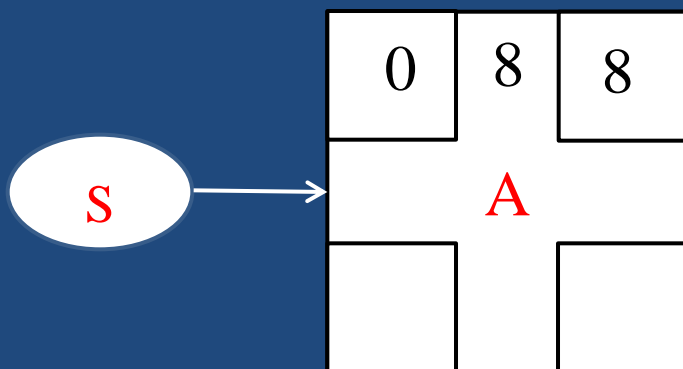
Αργότερη Έναρξη (LS):

$LS = LF - \text{Χρόνος ολοκλήρωσης της δραστηριότητας}$

Χρονικό Περιθώριο (ST): $ST = LS - ES = LF - EF$

Χαρακτηριστικά Αριθμητικά Μεγέθη Δραστηριοτήτων σε Κομβικά Δίκτυα

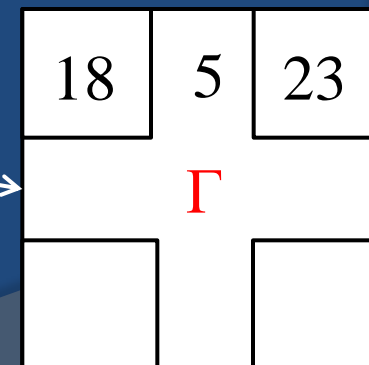
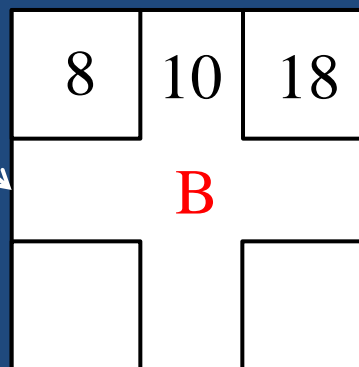
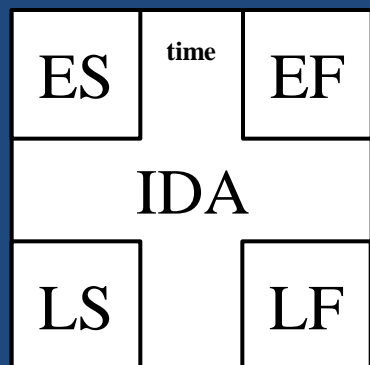
Α. Υπολογισμός ES και EF



Όταν η επόμενη Δραστηριότητα δέχεται ένα μόνο βέλος, τότε ισχύει:

$$ES(B)=EF(A)$$

$$ES(\Gamma)=EF(B)$$

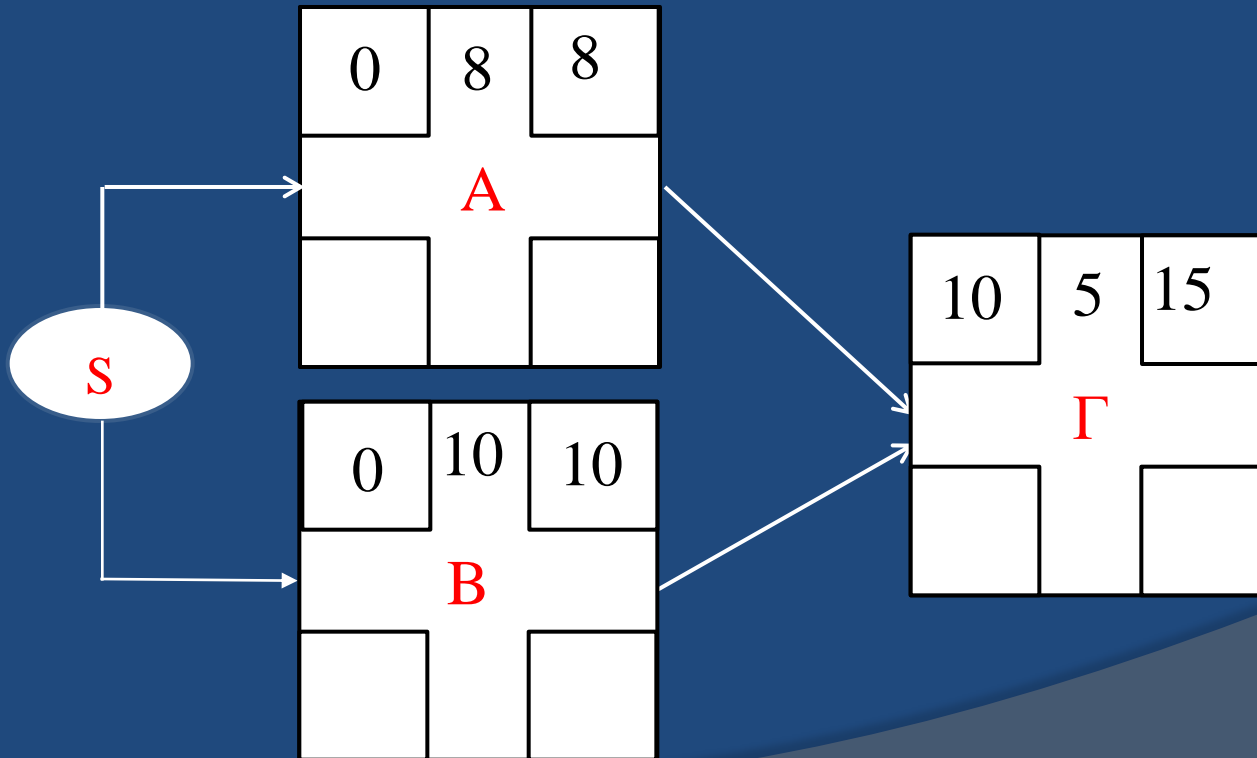


Χαρακτηριστικά Αριθμητικά Μεγέθη Δραστηριοτήτων σε Κομβικά Δίκτυα

A. Υπολογισμός ES και EF

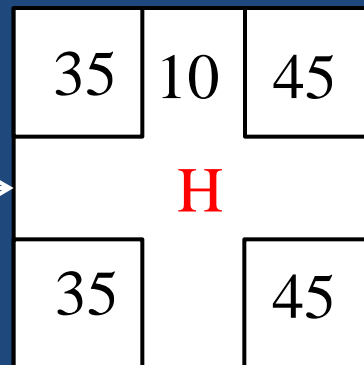
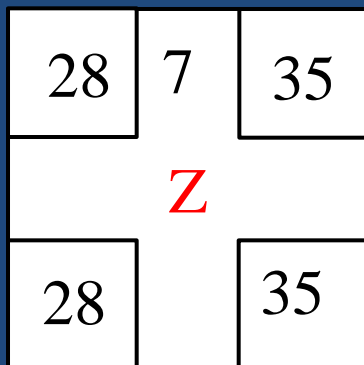
Όταν η επόμενη Δραστηριότητα δέχεται περισσότερα από ένα βέλος, τότε ισχύει:

$$ES(\Gamma) = \max[EF(A), EF(B)]$$



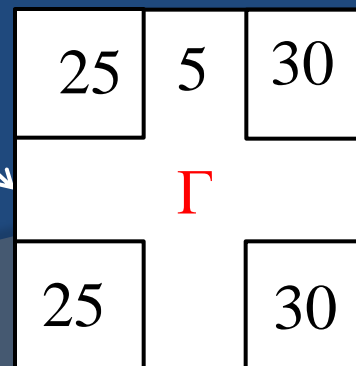
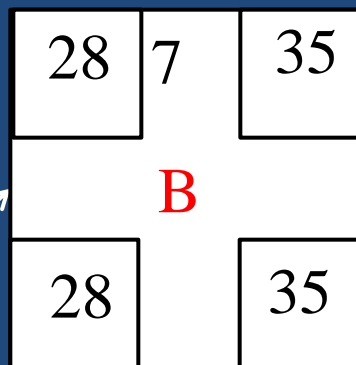
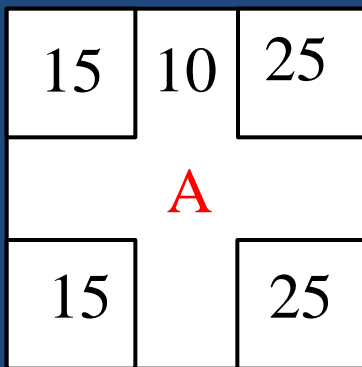
Α. Υπολογισμός LS και LF

Όταν από την προηγούμενη Δραστηριότητα φεύγει ένα μόνο βέλος, τότε ισχύει:
 $LF(Z) = LS(H)$



Όταν η επόμενη Δραστηριότητα φεύγουν περισσότερα από ένα βέλος, τότε ισχύει:

$$LF(A) = \min[LS(B), LS(\Gamma)]$$



5.7. Κρίσιμη Διαδρομή

Critical Path

Κρίσιμη Διαδρομή - Critical Path

Οι Δραστηριότητες οι οποίες ορίζονται από γεγονότα των οποίων το χρονικό περιθώριο (ES) είναι 0, ονομάζονται **Κρίσιμες Δραστηριότητες (Critical Activities)** και η διαδρομή, **Κρίσιμη Διαδρομή (Critical Path)**.

!!! Η **Κρίσιμη Διαδρομή** είναι η μεγαλύτερη διαδρομή από όλες τις διαδρομές και καθορίζει τον συνολικό χρόνο που απαιτείται για την ολοκλήρωση του έργου.

!!! Η διάρκεια του έργου είναι ίση με τον βραδύτερο χρόνο του τελευταίου γεγονότος.

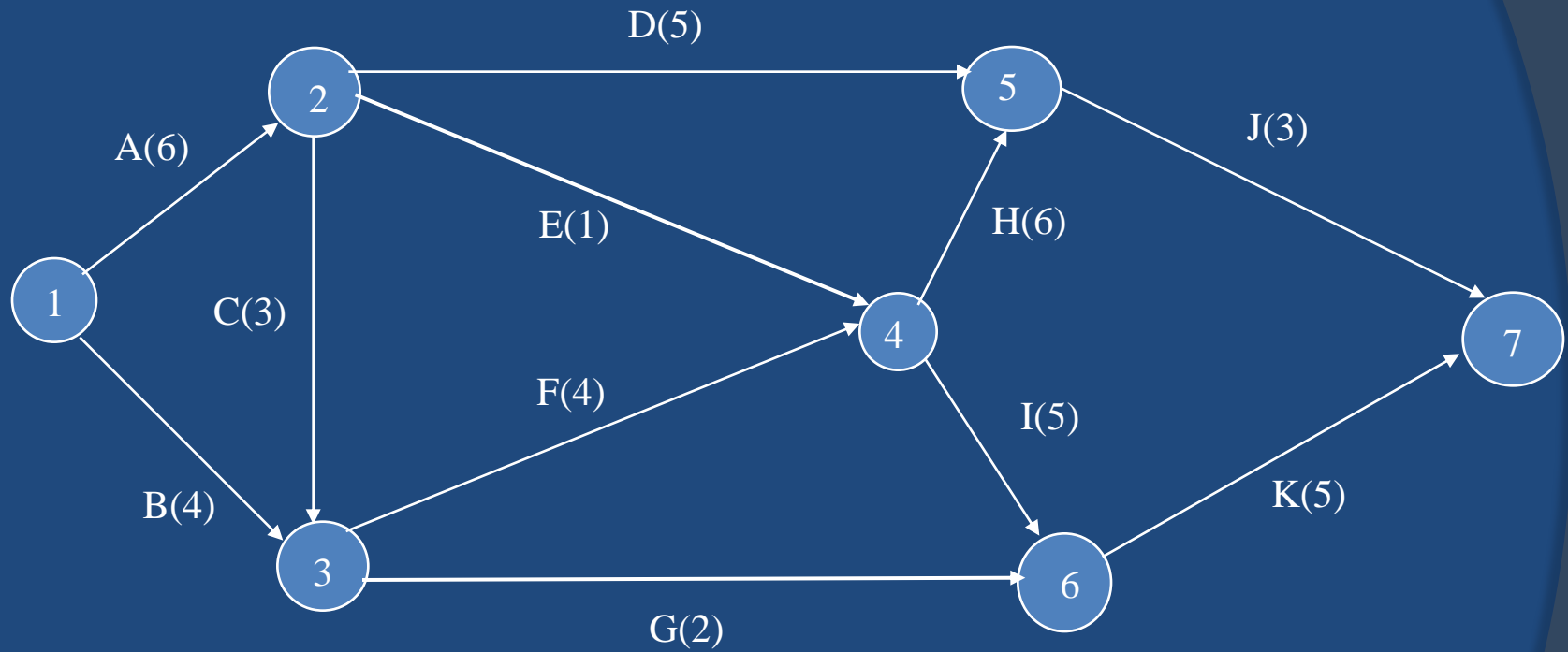
!!! Εάν οποιαδήποτε από αυτές τις κρίσιμες δραστηριότητες καθυστερήσει, θα προκαλέσει καθυστέρηση ολόκληρου του έργου.

!!! Οι δραστηριότητες που έχουν χρονικό περιθώριο διαφορετικό του 0, θα μπορούσαν να καθυστερήσουν χωρίς να προκαλέσουν καθυστέρηση στην ολοκλήρωση του έργου.

Παράδειγμα 1^ο: Να κατασκευαστεί το τοξωτό δίκτυο των παρακάτω δραστηριοτήτων ενός έργου και να βρεθεί η κρίσιμη διαδρομή και ο χρόνος ολοκλήρωσης του έργου.

Δραστηριότητα	Προαπαιτούμενη	Διάρκεια σε Μέρες
A	--	6
B	--	4
C	A	3
D	A	5
E	A	1
F	B,C	4
G	B,C	2
H	E,F	6
I	E,F	5
J	D,H	3
K	G,I	5

Τοξωτό Δίκτυο Παραδείγματος



Συντομότερος Χρόνος

$$ET(1)=0$$

$$ET(2)=ET(1)+t(1,2)=0+6=6$$

$$ET(3)=\max \left\{ \begin{array}{l} ET(1)+t(1,3)=0+4=4 \\ ET(2)+t(2,3)=6+3=9 \end{array} \right\} = 9$$

$$ET(4)=\max \left\{ \begin{array}{l} ET(2)+t(2,4)=6+1=7 \\ ET(3)+t(3,4)=9+4=13 \end{array} \right\} = 13$$

$$ET(5)=\max \left\{ \begin{array}{l} ET(2)+t(2,5)=6+5=11 \\ ET(4)+t(4,5)=13+6=19 \end{array} \right\} = 19$$

$$ET(6)=\max \left\{ \begin{array}{l} ET(4)+t(4,6)=13+5=18 \\ ET(3)+t(3,6)=9+2=11 \end{array} \right\} = 18$$

$$ET(7)=\max \left\{ \begin{array}{l} ET(5)+t(5,7)=19+3=22 \\ ET(6)+t(6,7)=18+5=23 \end{array} \right\} = 23$$

Βραδύτερος Χρόνος

$$LT(7)=ET(7)=23$$

$$LT(6)=LT(7)-t(6,7)=23-5=18$$

$$LT(5)=LT(7)-t(5,7)=23-3=20$$

$$LT(4)=\min \left\{ \begin{array}{l} LT(5)-t(4,5)=20-6=14 \\ LT(6)-t(4,6)=18-5=13 \end{array} \right\} = 13$$

$$LT(3)=\min \left\{ \begin{array}{l} LT(4)-t(3,4)=13-4=9 \\ LT(6)-t(3,6)=18-2=16 \end{array} \right\} = 9$$

$$LT(2)=\min \left\{ \begin{array}{l} LT(4)-t(2,4)=13-1=12 \\ LT(5)-t(2,5)=20-5=15 \\ LT(3)-t(2,3)=9-3=6 \end{array} \right\} = 6$$

$$LT(1)=\min \left\{ \begin{array}{l} LT(2)-t(1,2)=6-6=0 \\ LT(3)-t(1,3)=9-4=5 \end{array} \right\} = 0$$

$$ES(1)=LT(1)-ET(1) = 0-0=0$$

$$ES(2)=LT(2)-ET(2) = 6-6=0$$

$$ES(3)=LT(3)-ET(3) = 9-9=0$$

$$ES(4)=LT(4)-ET(4) = 13-13=0$$

$$ES(5)=LT(5)-ET(5) = 20-19=1$$

$$ES(6)=LT(6)-ET(6) = 18-18=0$$

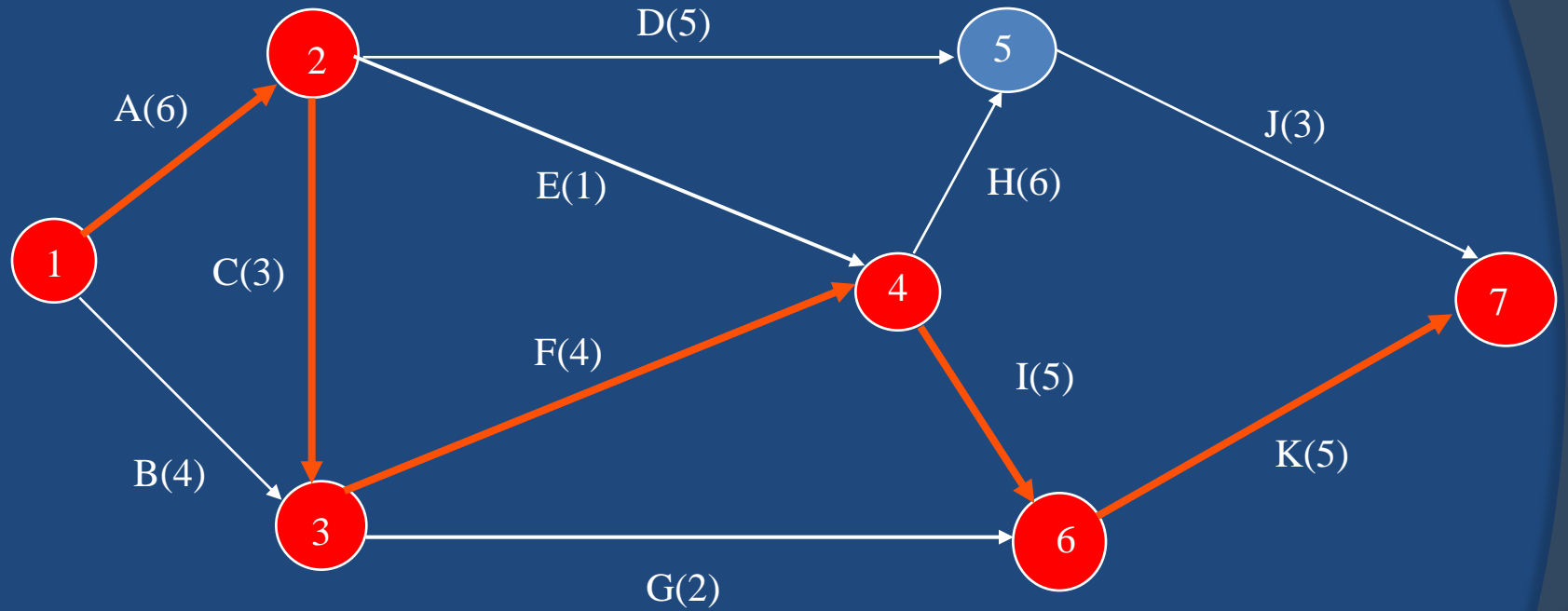
$$ES(7)=LT(7)-ET(7) = 23-23=0$$

Γεγονός	ET	LT	ES
1	0	0	0
2	6	6	0
3	9	9	0
4	13	13	0
5	19	20	1
6	18	18	0
7	23	23	0

Η Κρίσιμη Διαδρομή καθορίζεται από τα γεγονότα: 1,2,3,4,6 και 7.

Οι δραστηριότητες της κρίσιμης διαδρομής είναι: A,C,F,I και K και η μέγιστη διάρκεια είναι: $6+3+4+5+5=23$ ημέρες

Τοξωτό Δίκτυο Παραδείγματος



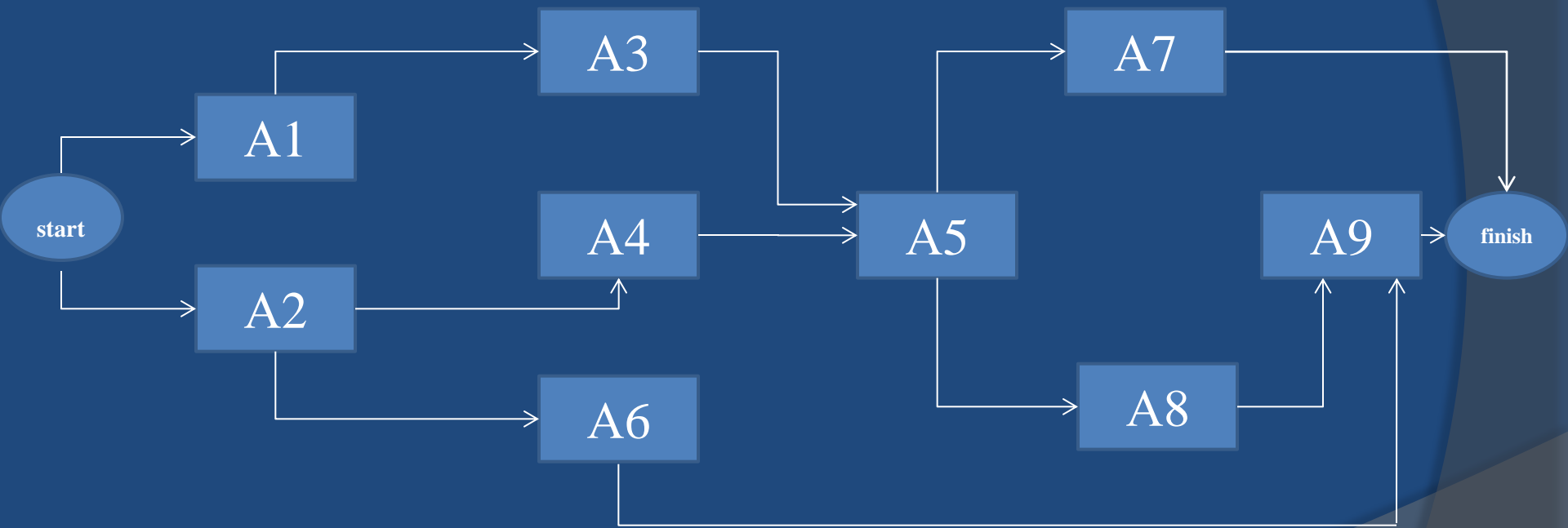
Παράδειγμα 2^ο

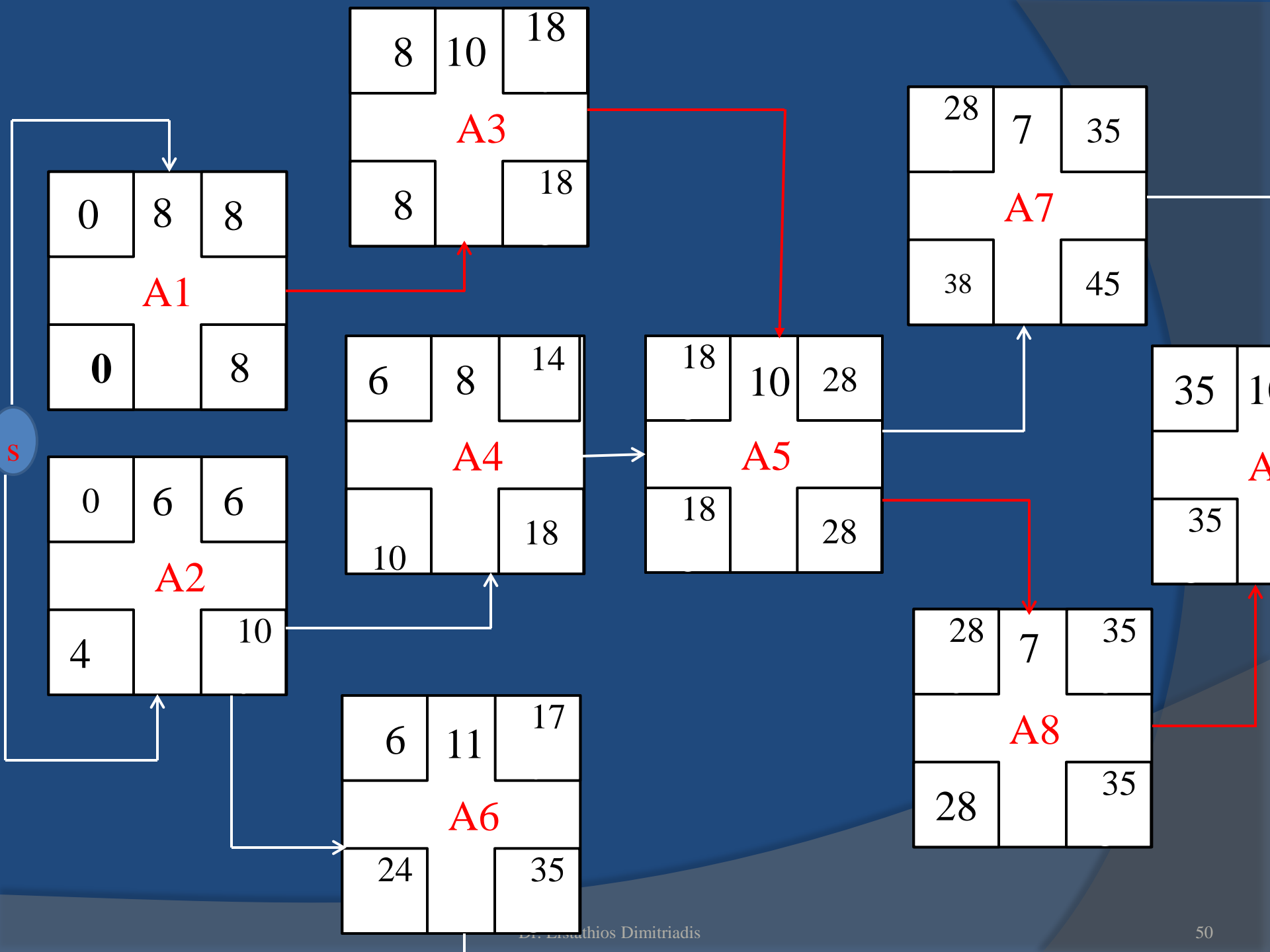
Ο Πίνακας περιλαμβάνει 9 δραστηριότητες απαραίτητες για την ολοκλήρωση συγκεκριμένου έργου.

Ποιος είναι ο μικρότερος χρόνος ολοκλήρωσης του έργου;
(Κομβικό δίκτυο)

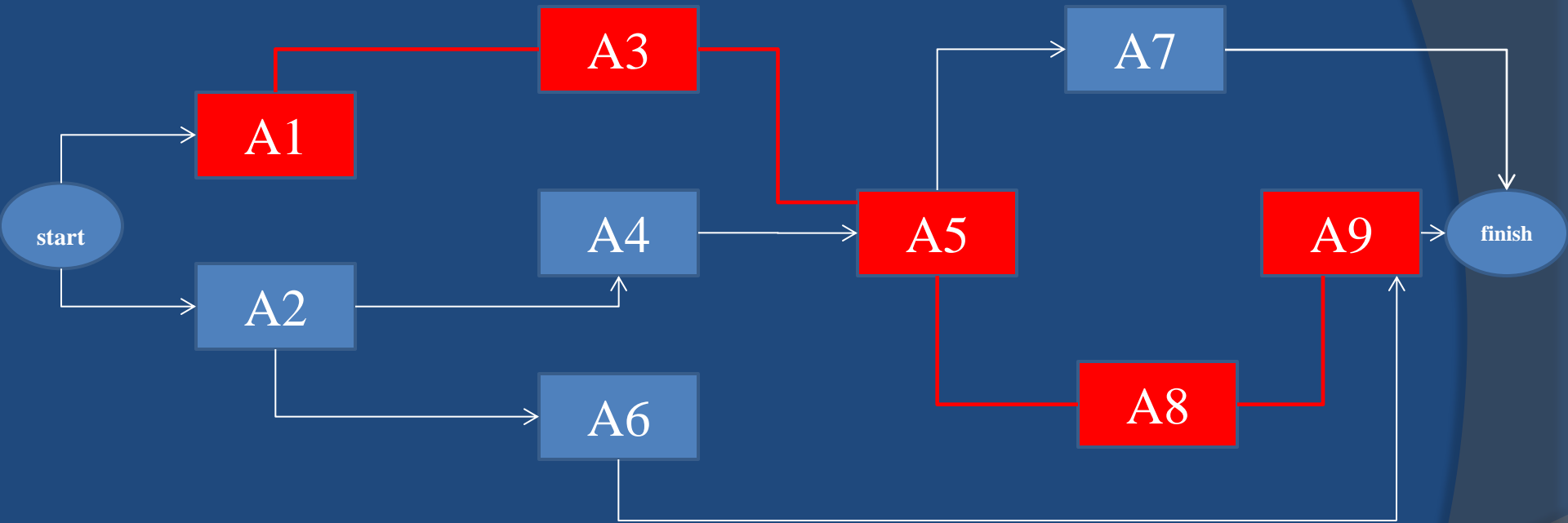
Δραστηριότητα	Προαπαιτούμενες Δραστηριότητες	Διάρκεια σε μέρες
A1	-----	8
A2	-----	6
A3	A1	10
A4	A2	8
A5	A3, A4	10
A6	A2	11
A7	A5	7
A8	A5	7
A9	A6, A8	10

Κομβικό Δίκτυο παραδείγματος





Δραστηριότητα	ES	EF	LS	LF	ST=LS-ES	ST=LF-EF
A1	0	8	0	8	0-0=0	8-8=0
A2	0	6	4	10	4-0=4	10-6=4
A3	8	18	8	18	8-8=0	18-18=0
A4	6	14	10	18	10-6=4	18-14=4
A5	18	28	18	28	18-18=0	28-28=0
A6	6	17	24	35	24-6=18	35-17=18
A7	28	35	38	45	38-28=10	45-35=10
A8	28	35	28	35	28-28=0	35-35=0
A9	35	45	35	45	35-35=0	45-45=0



Ο συντομότερος χρόνος ολοκλήρωσης του έργου είναι 45 ημέρες.

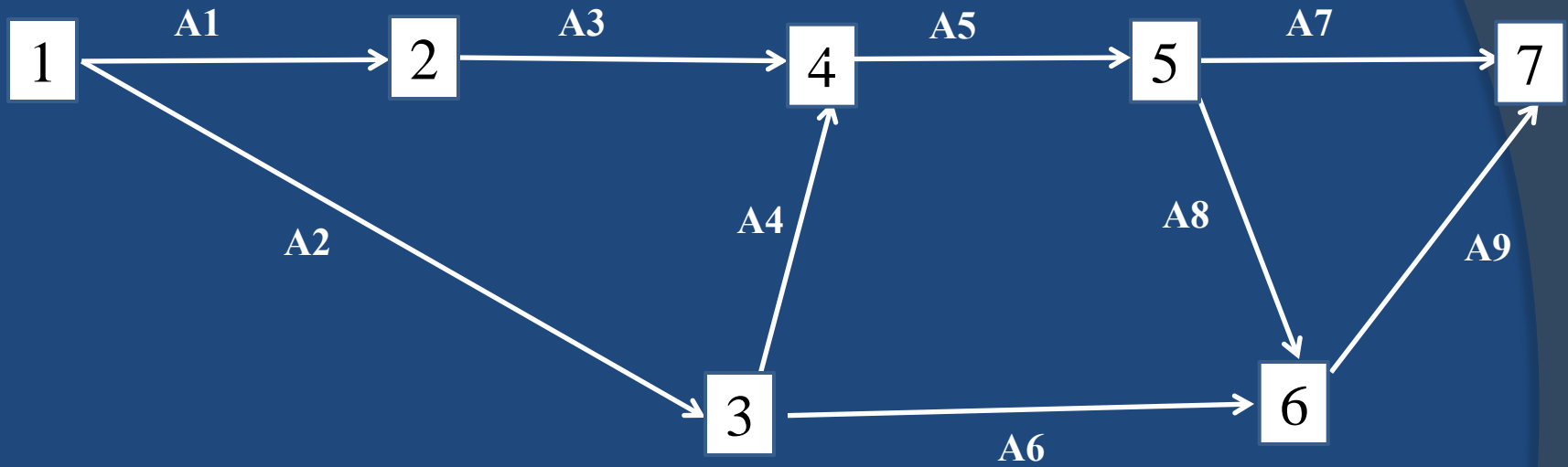
Παράδειγμα 3^ο

Ο Πίνακας περιλαμβάνει 9 δραστηριότητες απαραίτητες για την ολοκλήρωση συγκεκριμένου έργου.

Ποιος είναι ο μικρότερος χρόνος ολοκλήρωσης του έργου; (Τοξωτό δίκτυο)

Δραστηριότητα	Προαπαιτούμενες Δραστηριότητες	Διάρκεια σε μέρες
A1	-----	8
A2	-----	6
A3	A1	10
A4	A2	8
A5	A3, A4	10
A6	A2	11
A7	A5	7
A8	A5	7
A9	A6, A8	10

Τοξωτό Δίκτυο



1. Συντομότερος χρόνος του γεγονότος i (Earliest time- ET)

$$ET(1)=0$$

$$ET(2)=ET(1)+t(1,2)=0+8=8$$

$$ET(3)=ET(1)+t(1,3)=0+6=6$$

$$ET(4)=\max \left\{ \begin{array}{l} ET(2)+t(2,4)=8+10=18 \\ ET(3)+t(3,4)=6+8=14 \end{array} \right\} \quad ET(4)=18$$

$$ET(5)=ET(4)+t(4,5)=18+10=28$$

$$ET(6)=\max \left\{ \begin{array}{l} ET(5)+t(5,6)=28+7=35 \\ ET(3)+t(3,6)=6+11=17 \end{array} \right\} \quad ET(6)=35$$

$$ET(7)=\max \left\{ \begin{array}{l} ET(5)+t(5,7)=28+7=35 \\ ET(6)+t(6,7)=35+10=45 \end{array} \right\} \quad ET(7)=45$$

2. Βραδύτερος χρόνος του γεγονότος i (Latest time- LT)

$$LT(7)=ET(7)=45$$

$$LT(6)=LT(7)-t(6,7)=45-10=35$$

$$LT(5)=LT(6)-t(5,6)=35-7=28$$

$$LT(4)=LT(5)-t(4,5)=28-10=18$$

$$LT(3)=\min\left\{\begin{array}{l} LT(6)-t(3,6)=35-11=24 \\ LT(4)-t(3,4)=18-8=10 \end{array}\right\} \quad \left. \vphantom{\min}\right\} LT(3)=10$$

$$LT(2)=LT(4)-t(2,4)=18-10=8$$

$$LT(1)=\min\left\{\begin{array}{l} LT(2)-t(1,2)=8-8=0 \\ LT(3)-t(1,3)=10-6=4 \end{array}\right\} \quad \left. \vphantom{\min}\right\} LT(1)=0$$

3. Χρονικό περιθώριο του γεγονότος i (Event Slack- ES)

$$ES(1)=LT(1)-ET(1)=0-0=0$$

$$ES(2)=LT(2)-ET(2)=4-4=0$$

$$ES(3)=LT(3)-ET(3)=8-2=6$$

$$ES(4)=LT(4)-ET(4)=14-14=0$$

$$ES(5)=LT(5)-ET(5)=14-14=0$$

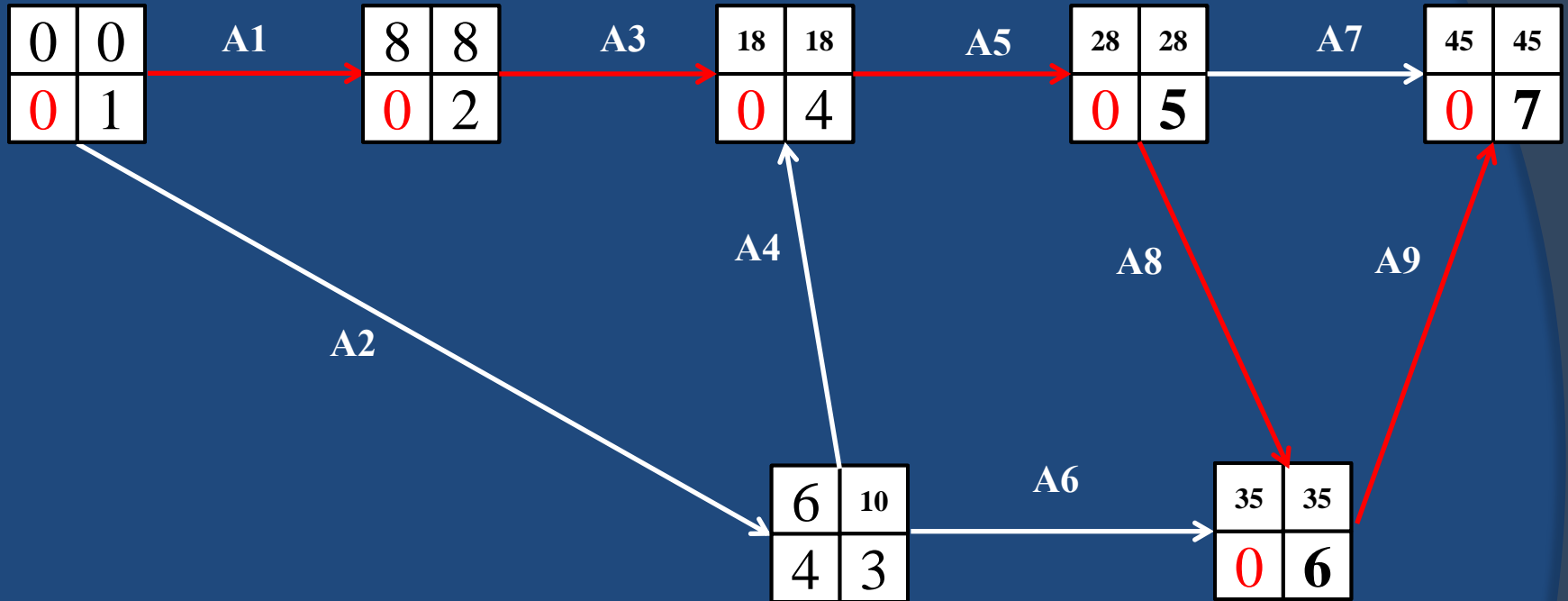
$$ES(6)=LT(6)-ET(6)=22-22=0$$

$$ES(7)=LT(7)-ET(7)=45-45=0$$

Γεγονός	ET	LT	ES
1	0	0	0*
2	8	8	0*
3	6	14	8
4	18	18	0*
5	28	28	0*
6	35	35	0*
7	45	45	0*

*Γεγονότα κρίσιμης διαδρομής

Κρίσιμη Διαδρομή



Κρίσιμη Διαδρομή

Διέρχεται από τα Γεγονότα: 1, 2, 4, 5, 6, 7.

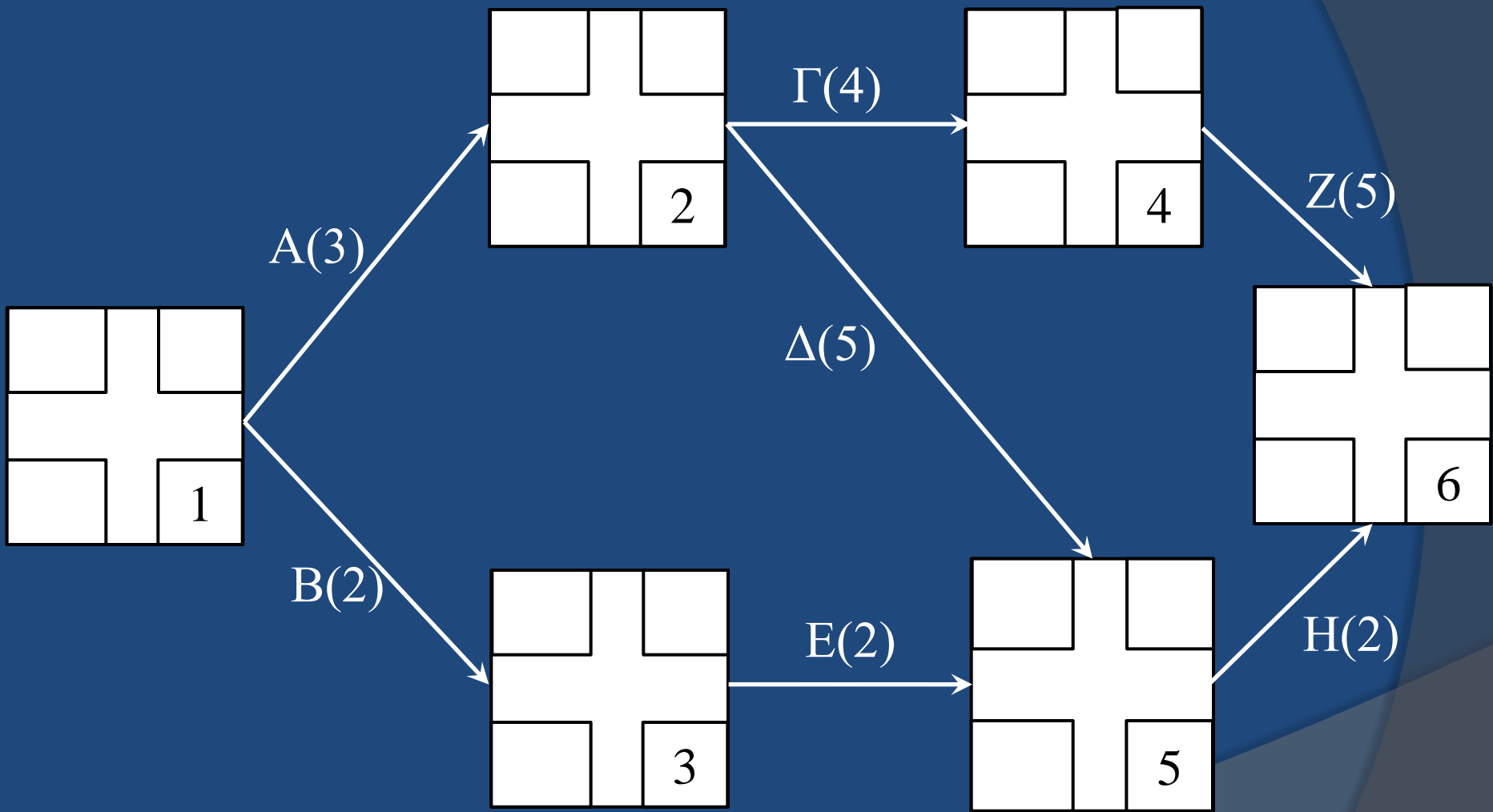
Περιλαμβάνει τις Δραστηριότητες: A1, A3, A5, A8, A9

Ο συντομότερος χρόνος ολοκλήρωσης του έργου είναι 45 ημέρες.

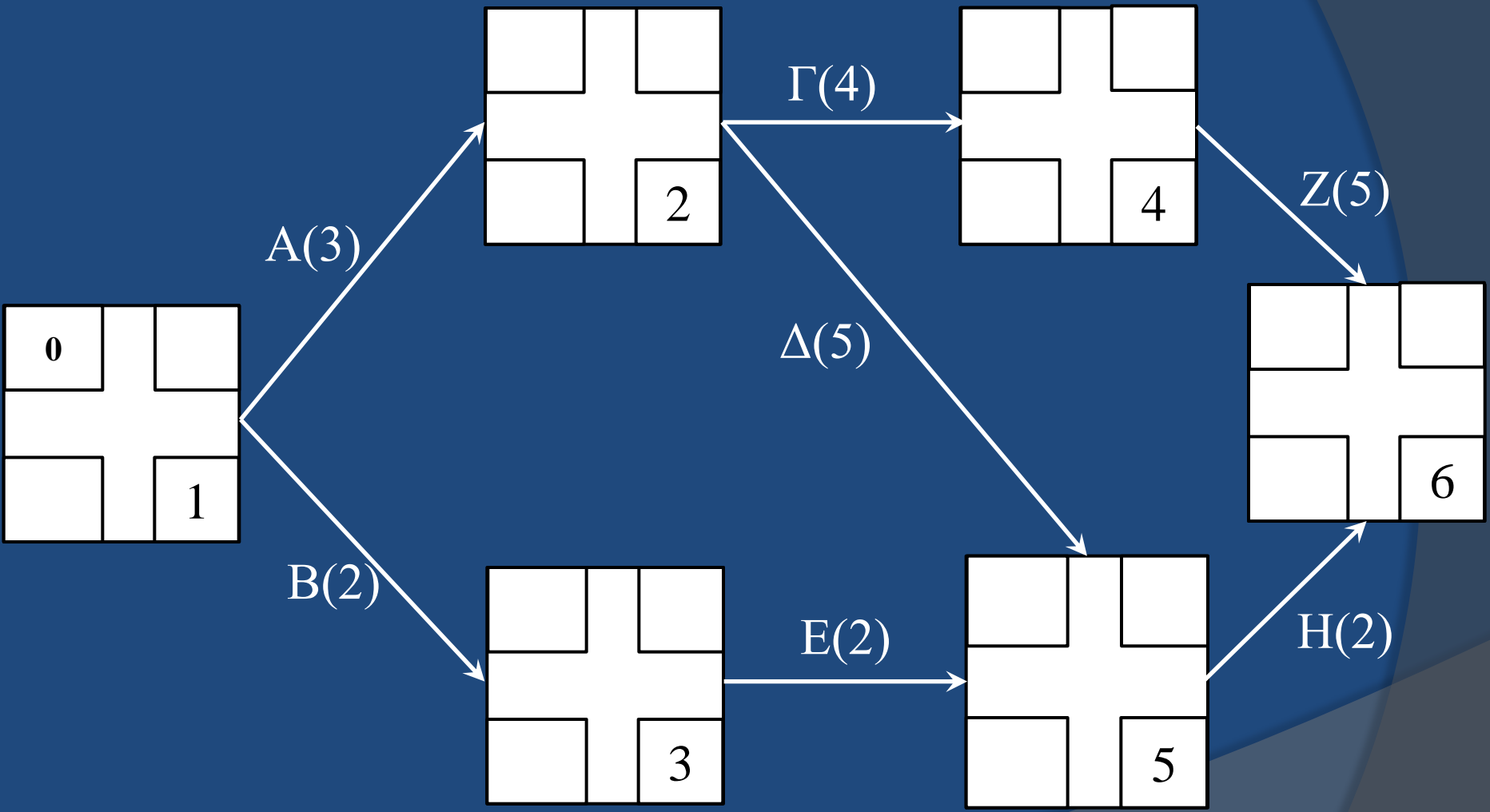
Υπολογισμός, Βήμα –Βήμα, Χαρακτηριστικών Μεγεθών Γεγονότων Τοξωτού Δικτύου

Δραστηριότητα	Προαπαιτούμενες	Διάρκεια
A	-	3
B	-	2
Γ	A	4
Δ	A	5
E	B	2
Z	Γ	5
H	E, Δ	2

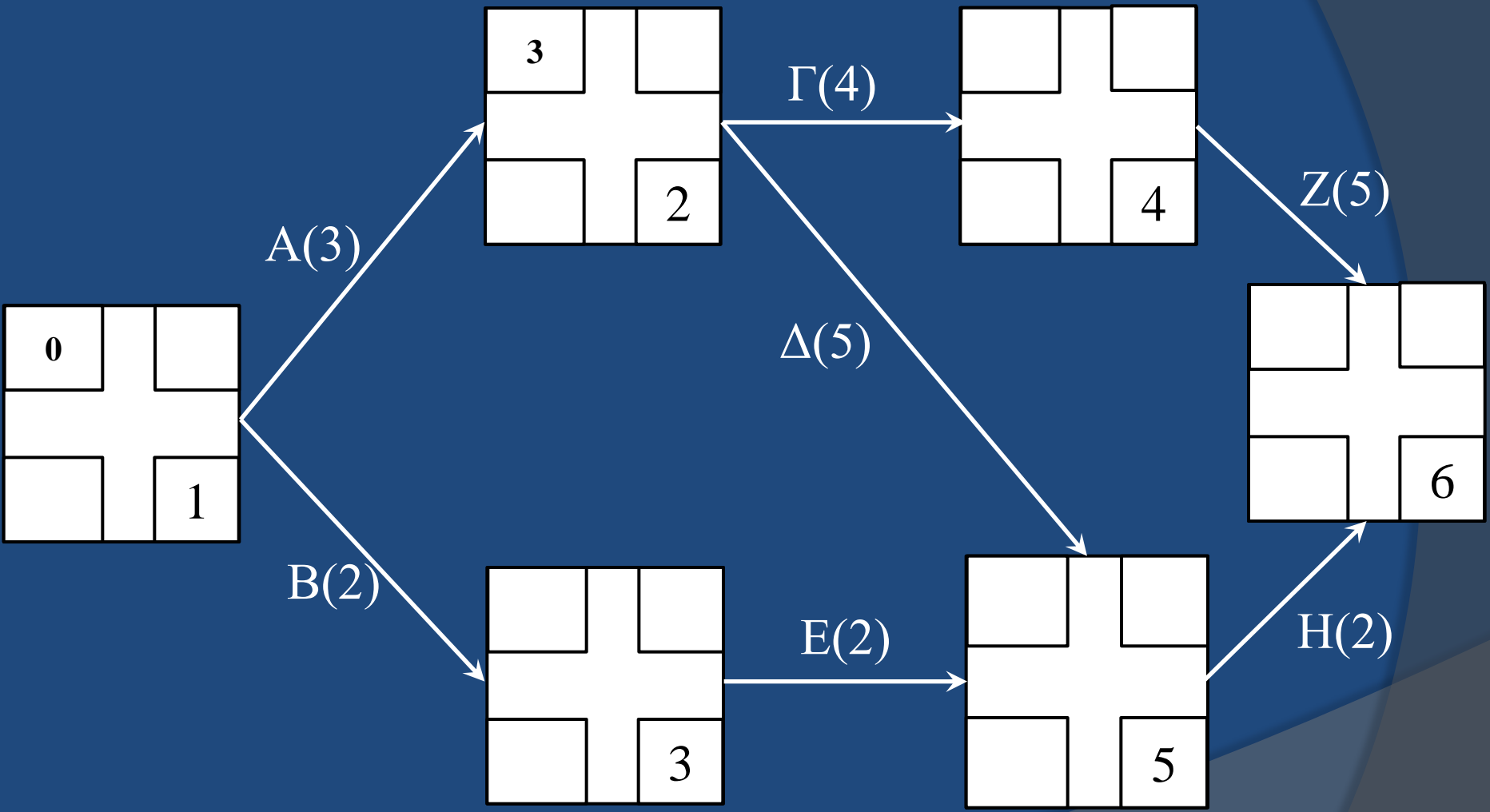
Τοξωτό Δίκτυο



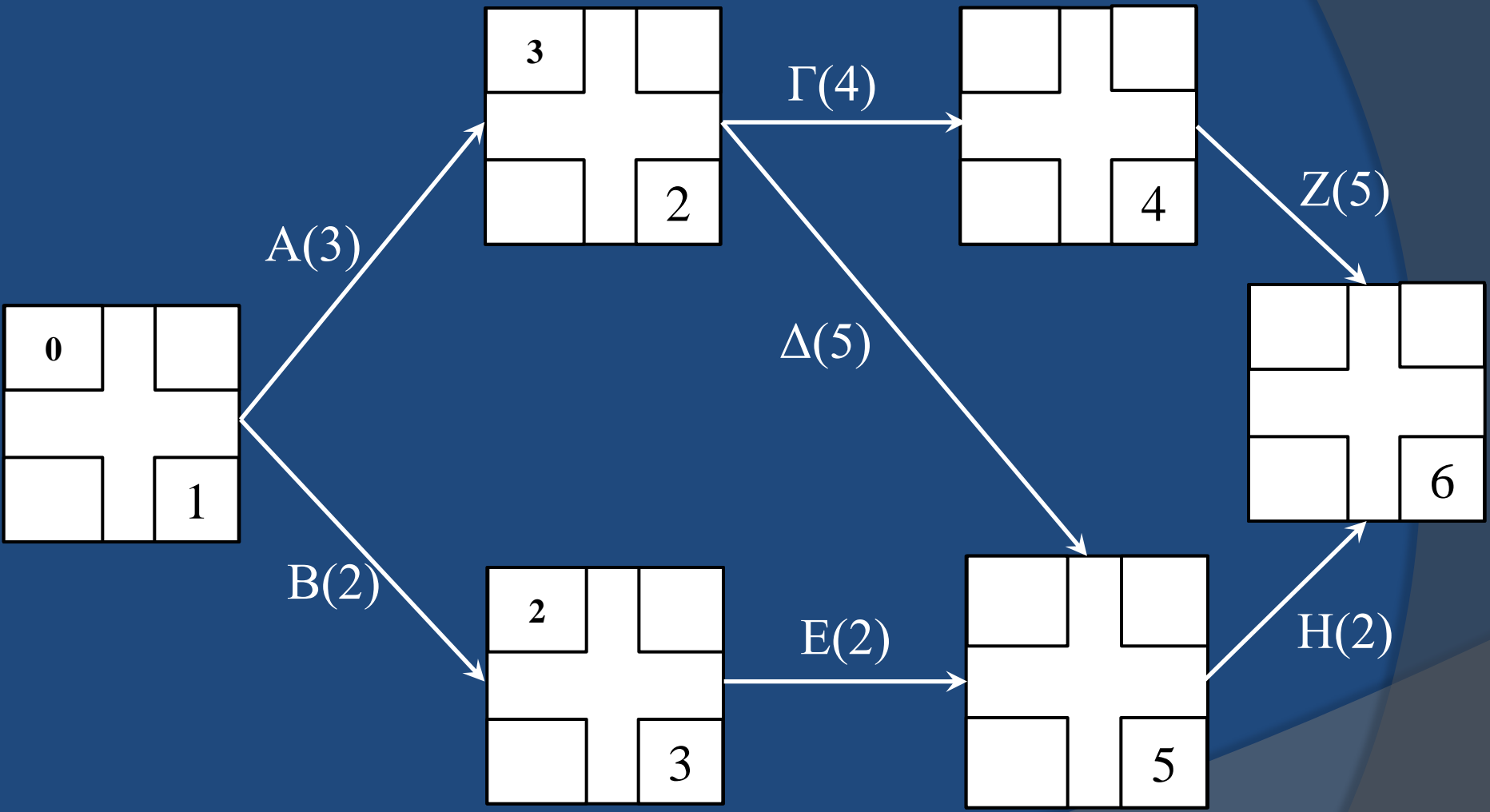
Βήμα 1^ο : ET(1) = 0



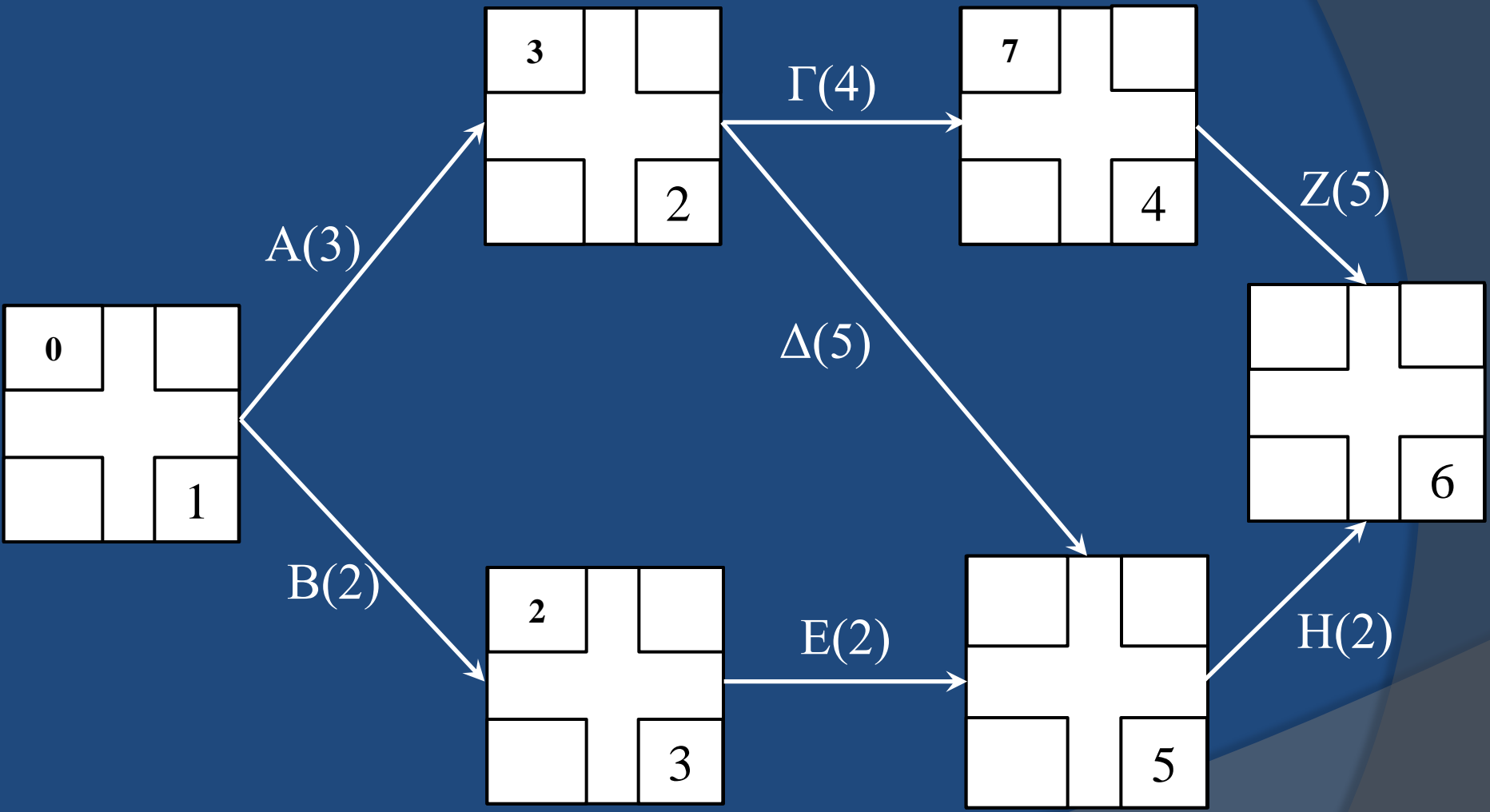
Βήμα 2^ο : ET(2) = 0+3=3



Βήμα 3^ο : $ET(3) = 0+2=2$

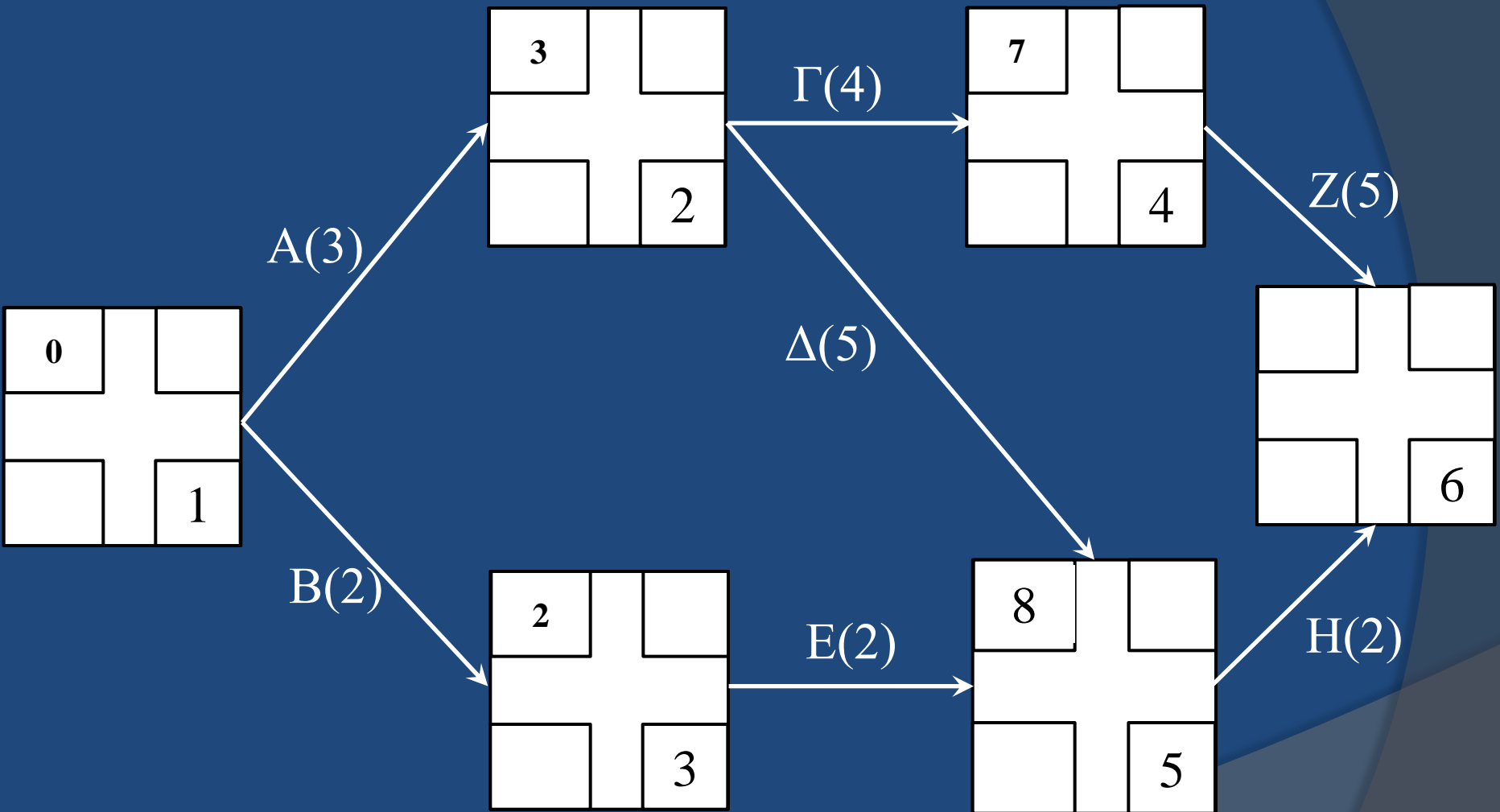


Βήμα 4^ο : ET(4) = 3+4=7

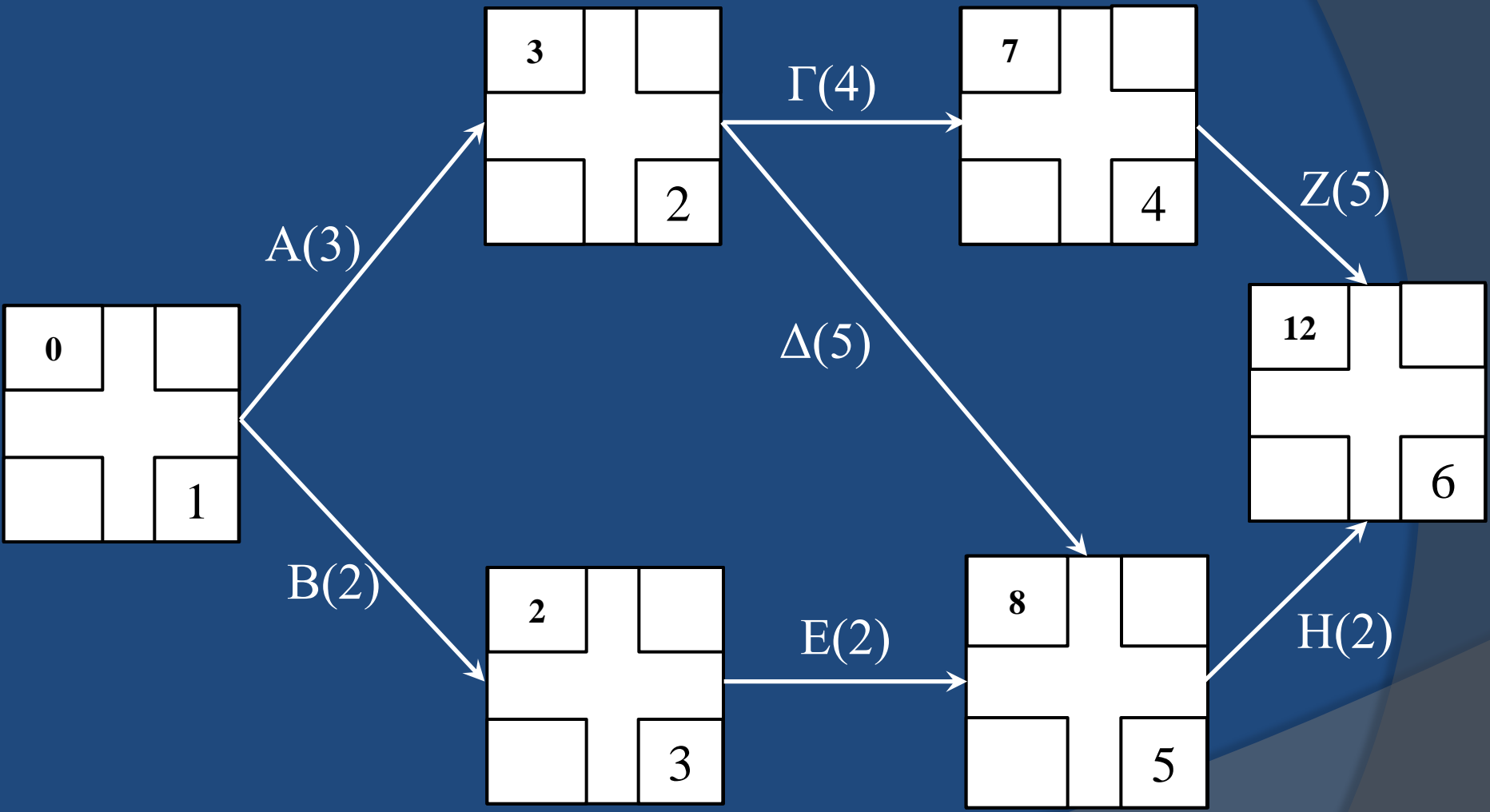


Βήμα 5^ο ET(5):

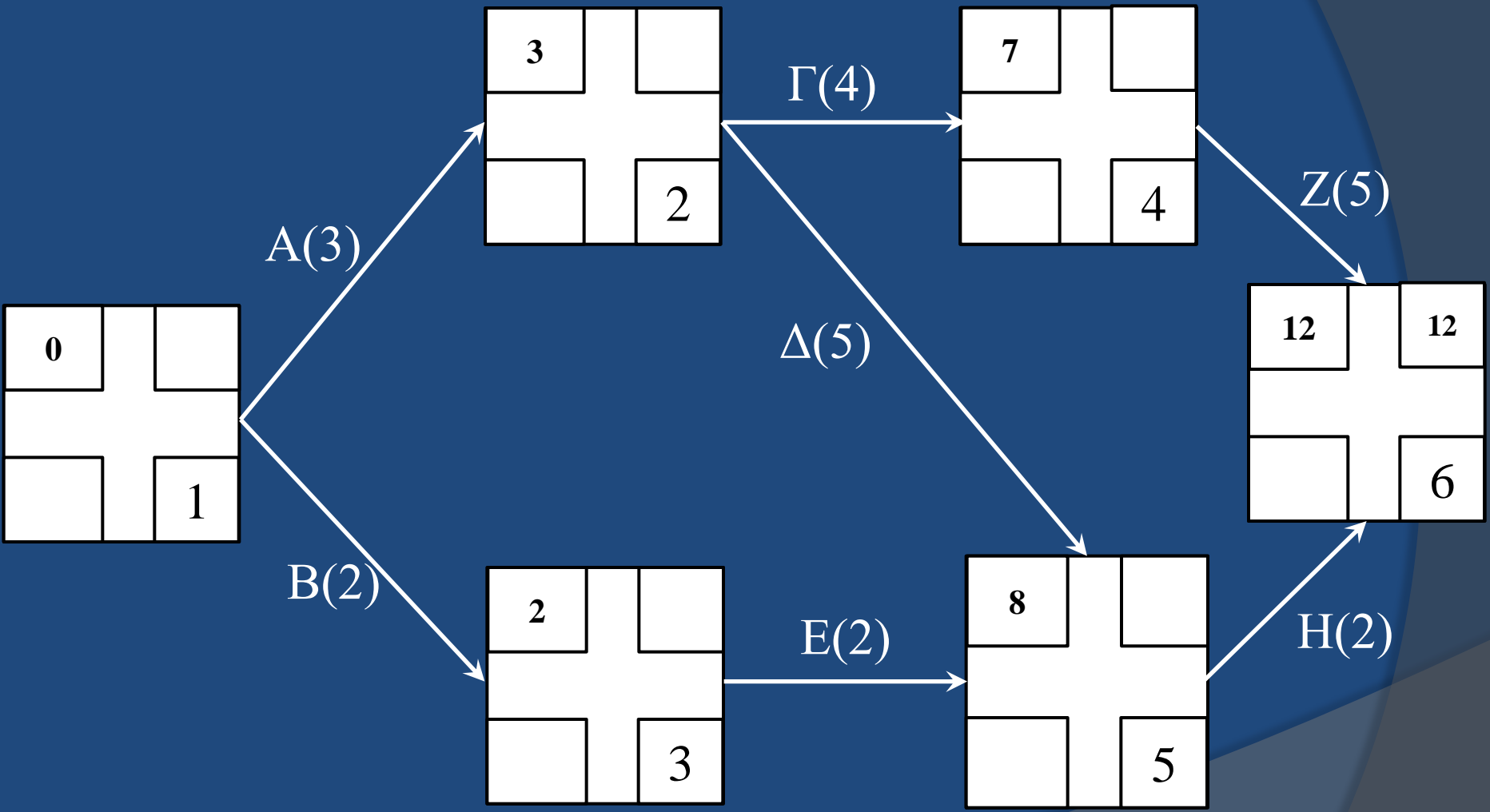
ET(5) = 3+5=8 ή 2+2=4 Σωστό: ET(5)=8



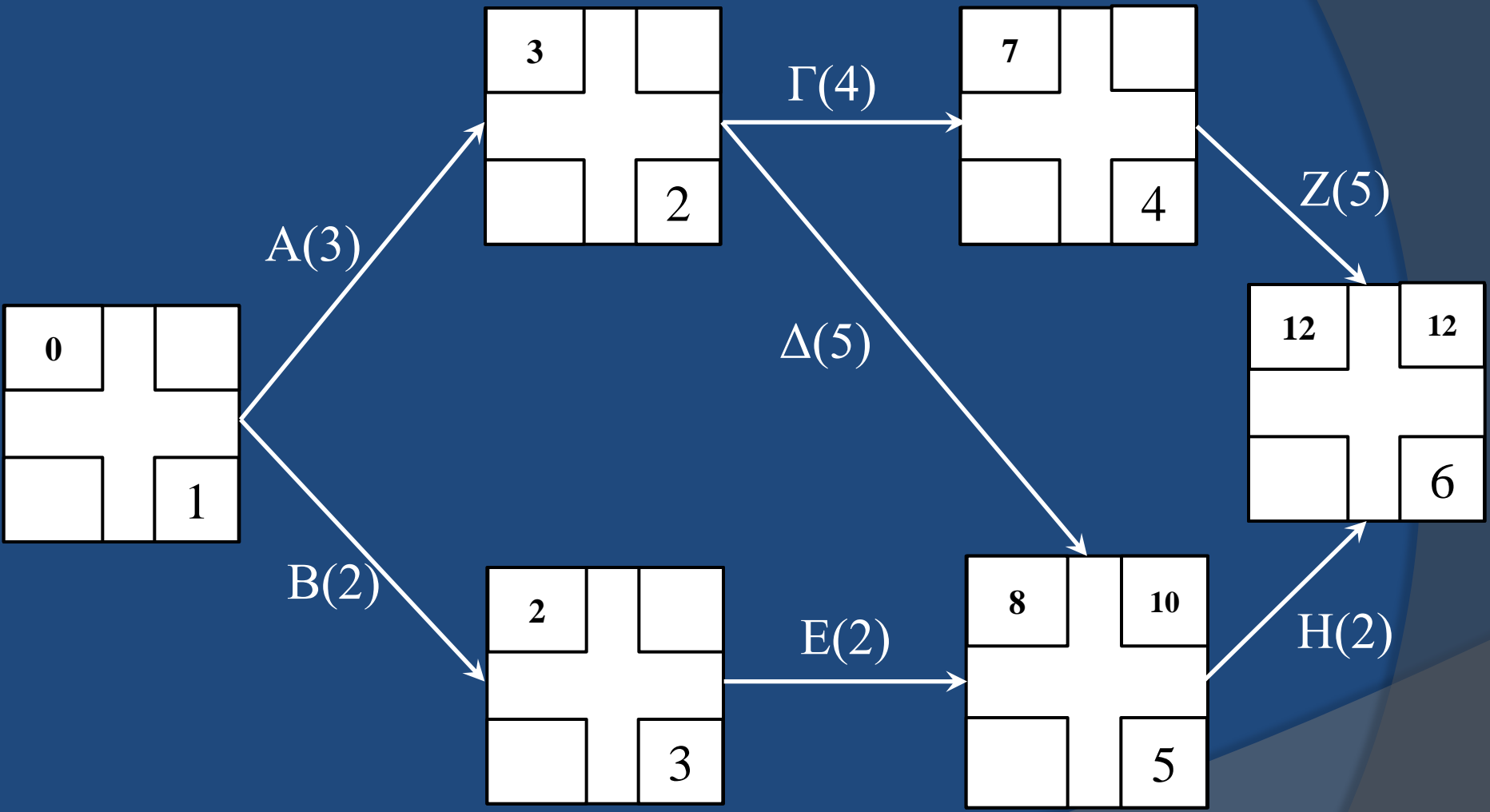
Βήμα 6° : $ET(6) = 7+5=12$



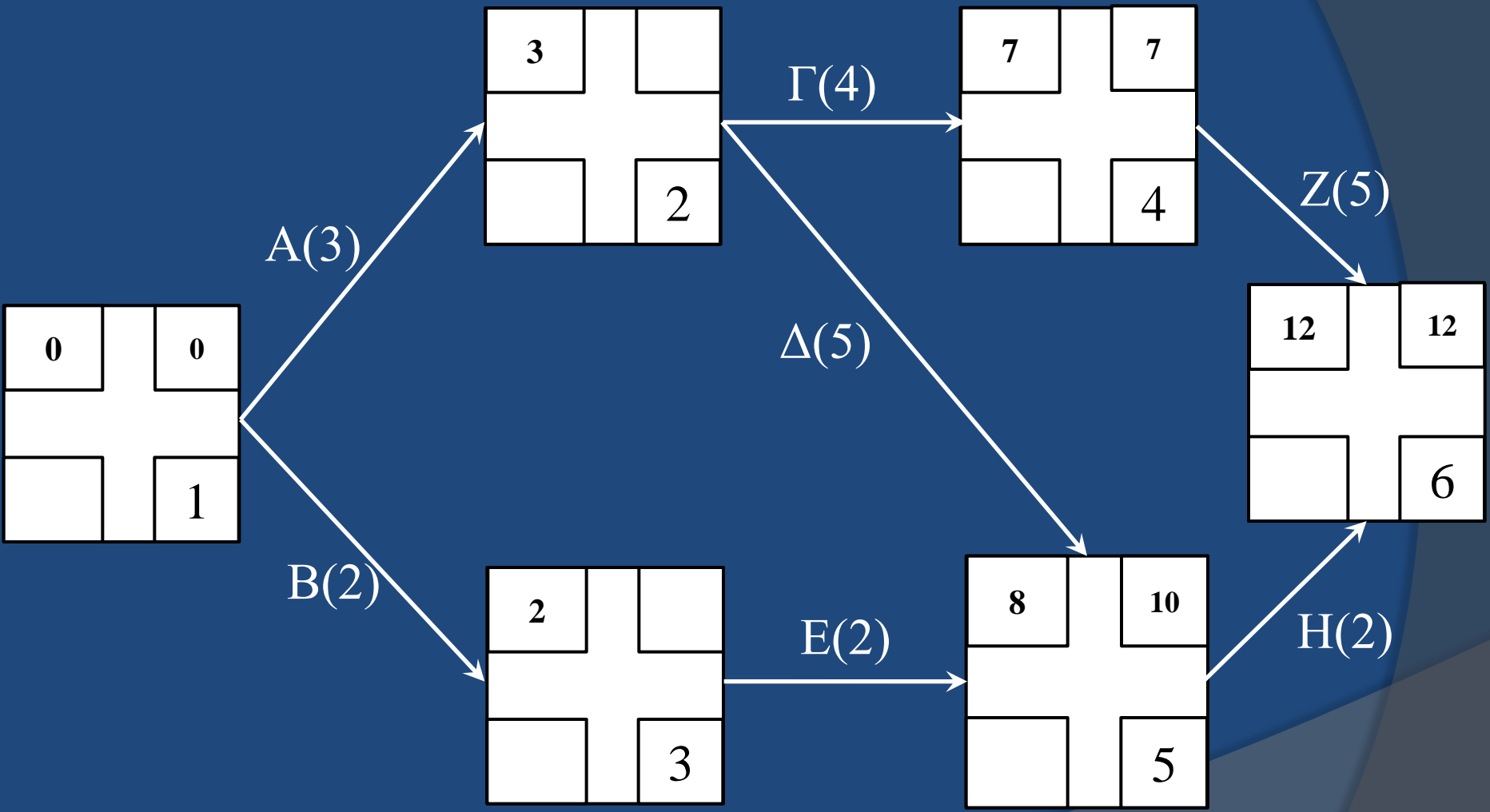
Βήμα 7^ο : $LT(6) = ET(6) = 12$



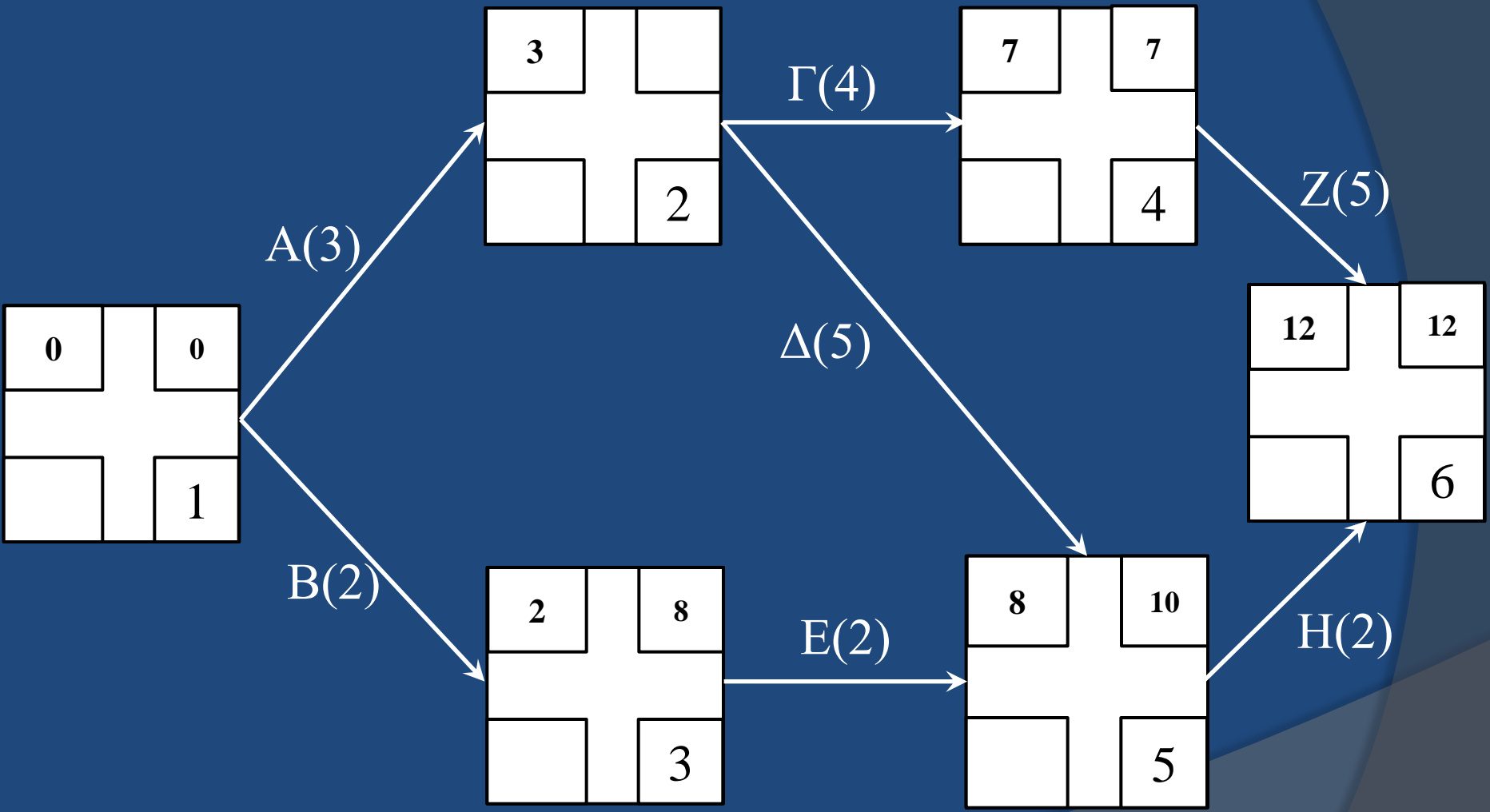
Βήμα 8^ο : $LT(5) = 12 - 2 = 10$



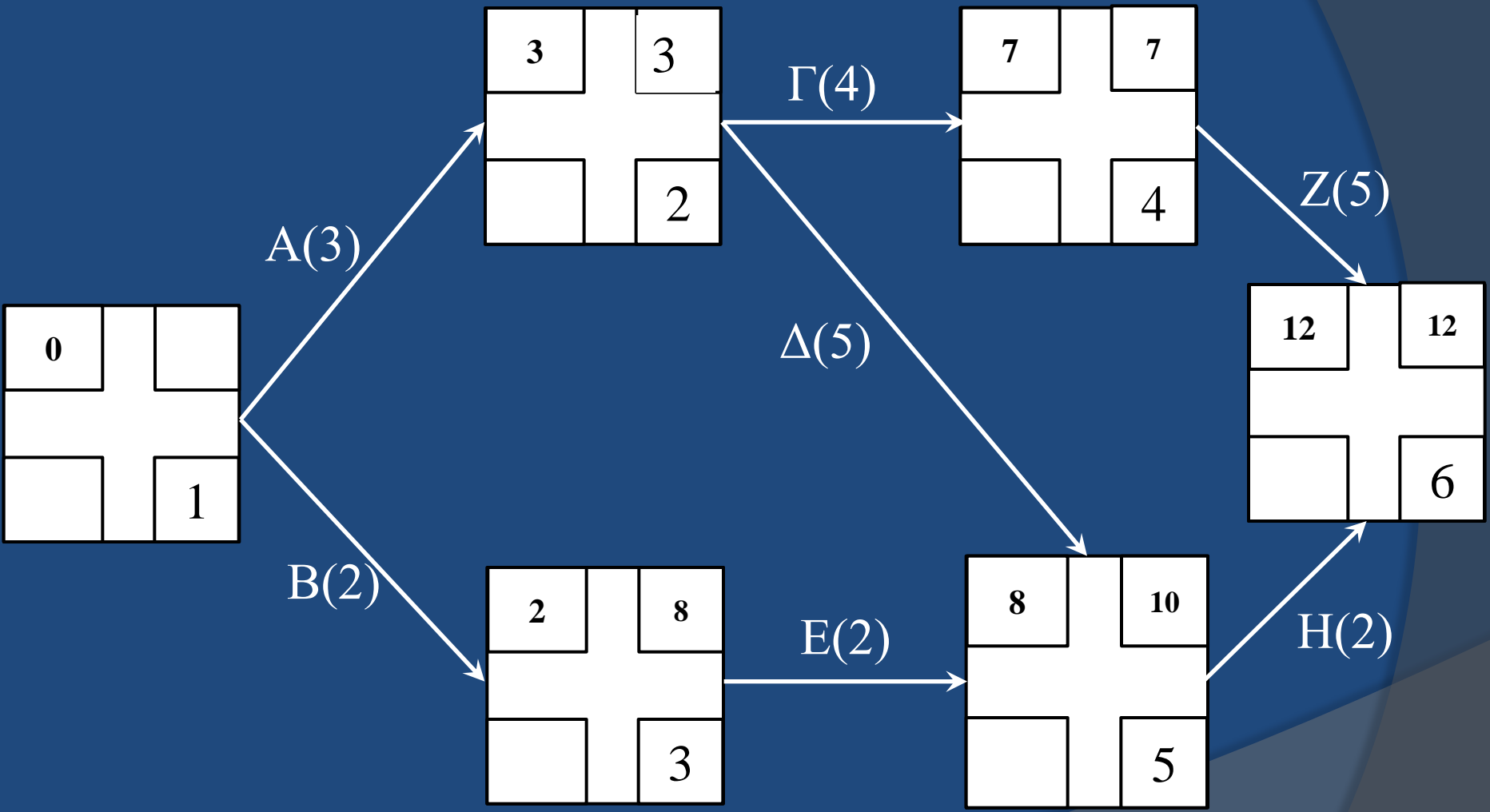
Βήμα 9^ο : $LT(4) = 12 - 5 = 7$



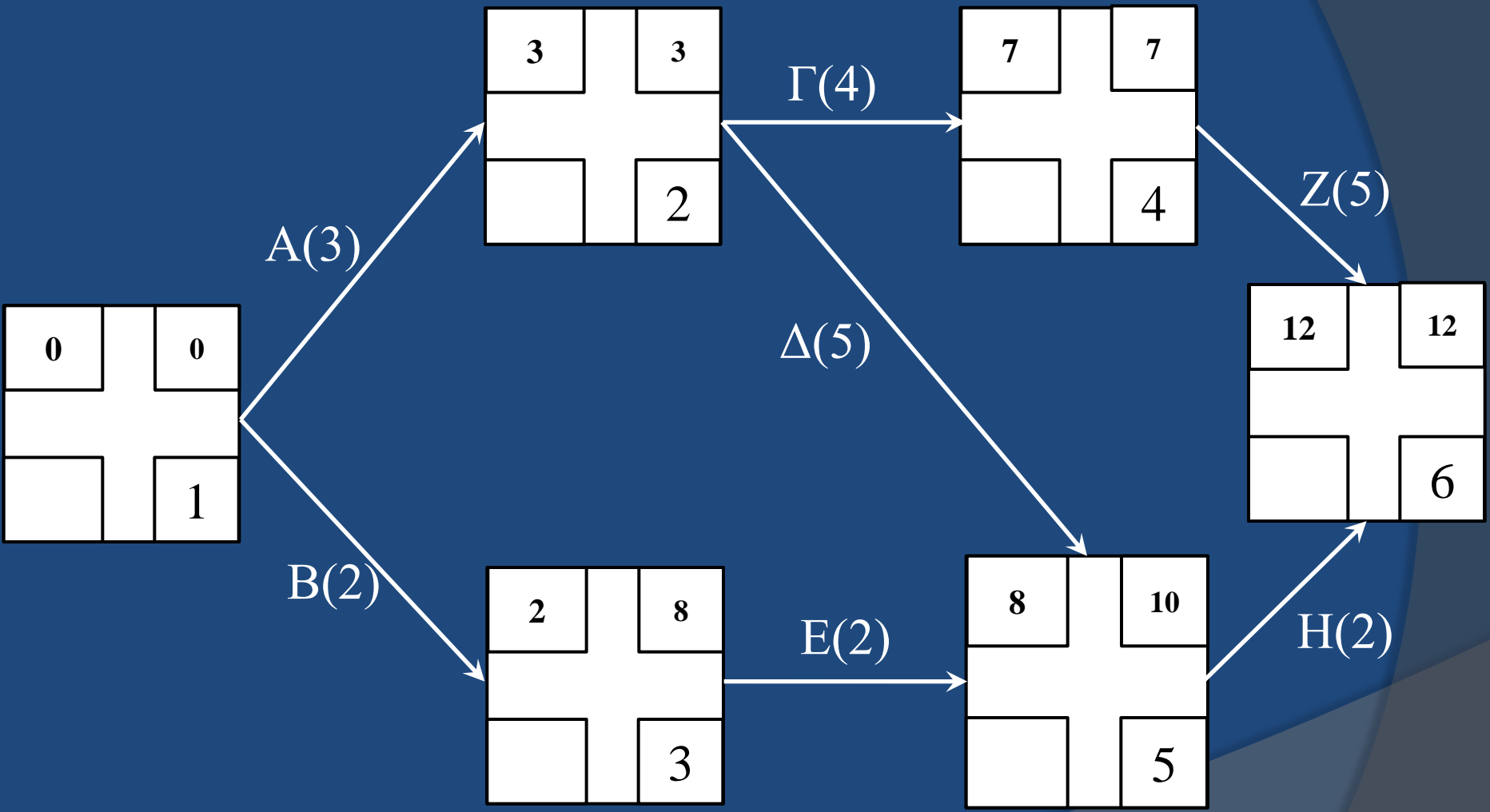
Βήμα 10° : $LT(3) = 10 - 2 = 8$



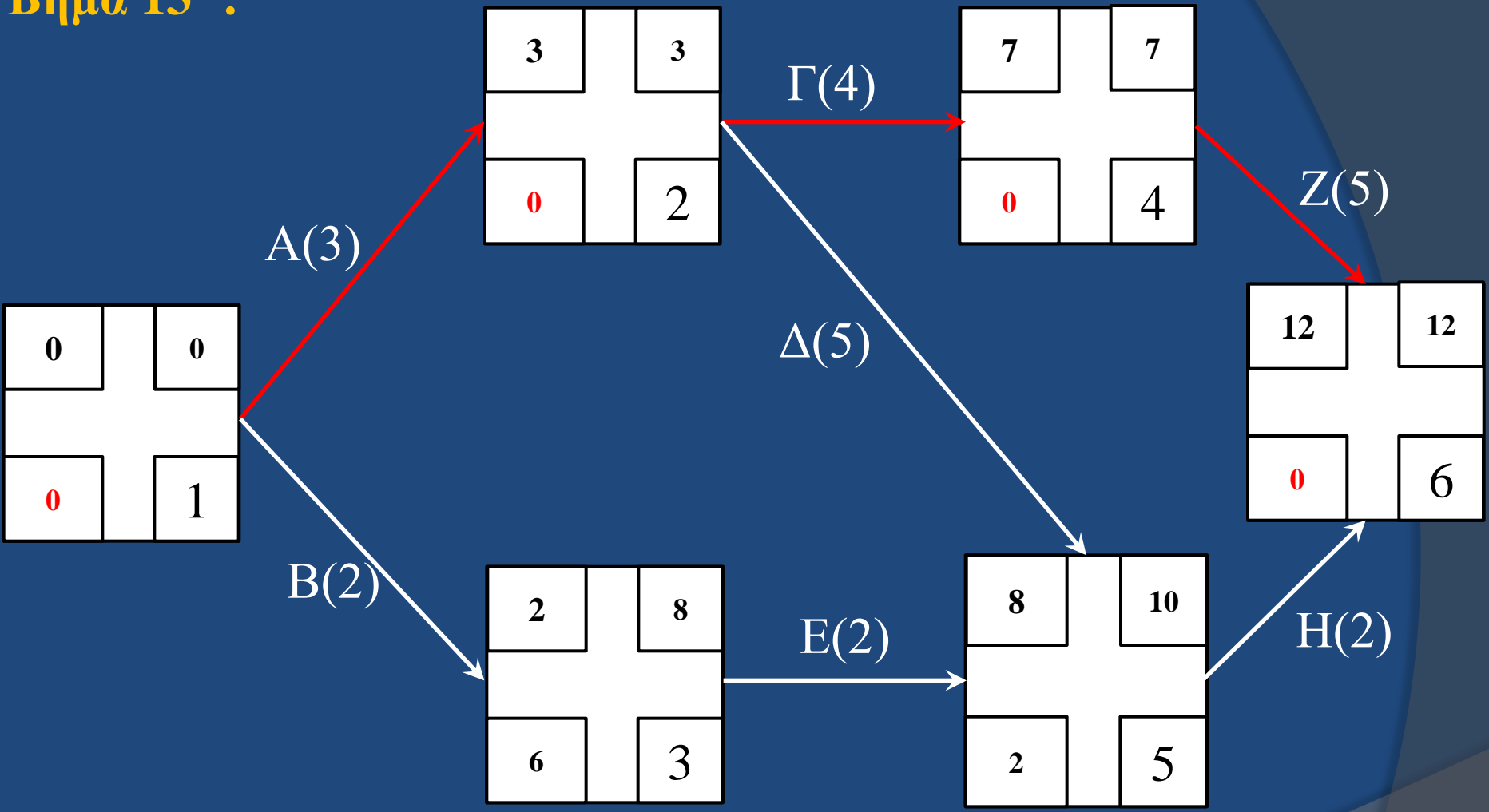
Βήμα 11^ο LT(2): $LT(2) = 7-4=3$ ή $10-5=5$ Σωστό: $LT(2)=3$



Βήμα 12^ο : $LT(1) = 3-3=0$ ή $8-2=6$ Σωστό: $LT(1)=0$



Βήμα 13^ο :



Κρίσιμη διαδρομή: 1,2,4,6
 Δραστηριότητες: Α, Γ, Ζ.

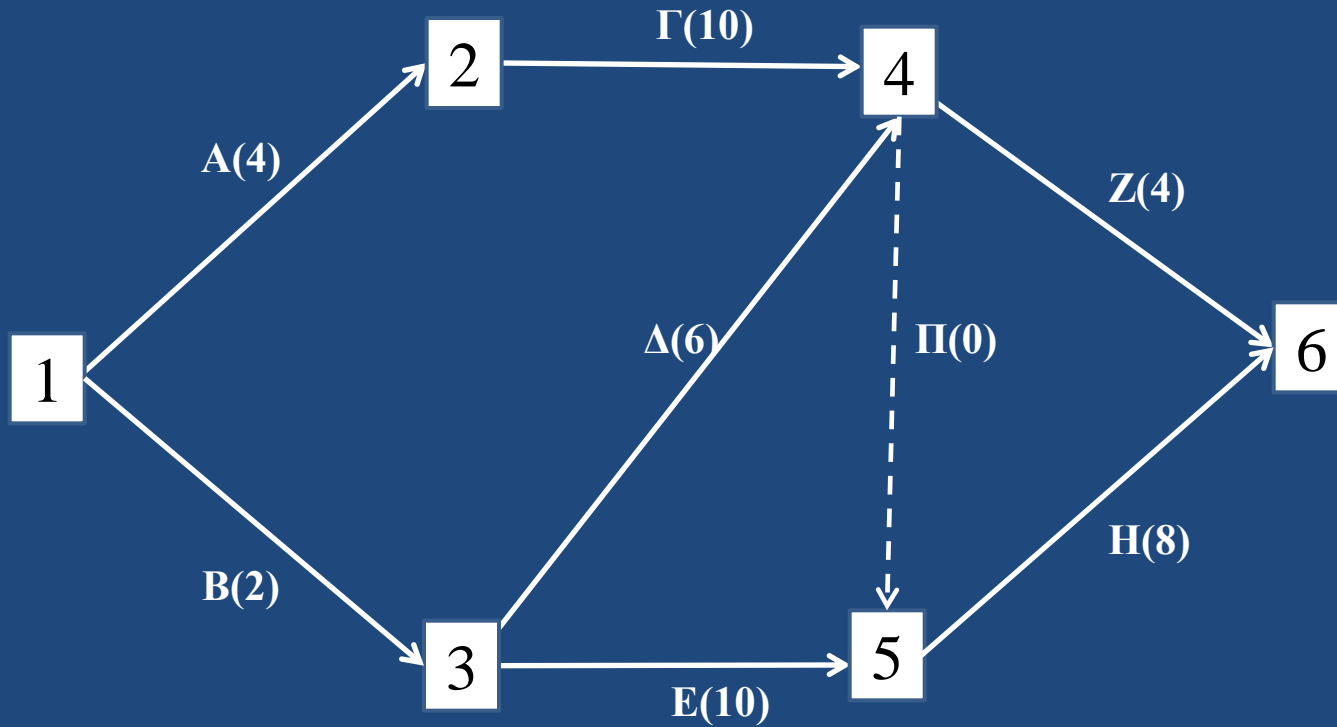
Παράδειγμα τοξωτού δικτύου με Πλασματική Δραστηριότητα

Για την ολοκλήρωση ενός έργου απαιτείται η εκτέλεση ενός αριθμού δραστηριοτήτων. Οι δραστηριότητες, οι διάρκειές τους και οι περιορισμοί που υπάρχουν στην εκτέλεσή τους παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα.

Να υπολογιστεί ο μικρότερος χρόνος ολοκλήρωσης του έργου.

Δραστηριότητα	Προαπαιτούμενες Δραστηριότητες	Διάρκεια σε μέρες
A	-----	4
B	-----	2
Γ	A	10
Δ	B	6
E	B	10
Z	Γ,Δ	4
H	Γ,Δ,E	8

Τοξωτό Δίκτυο με πλασματική δραστηριότητα II



1. Συντομότερος χρόνος του γεγονότος i (Earliest time- ET)

$$ET(1)=0$$

$$ET(2)=ET(1)+t(1,2)=0+4=4$$

$$ET(3)=ET(1)+t(1,3)=0+2=2$$

$$ET(4) = \max \left\{ \begin{array}{l} ET(2)+t(2,4)=4+10=14 \\ ET(3)+t(3,4)=2+6=8 \end{array} \right\} \quad ET(4)=14$$

$$ET(5) = \max \left\{ \begin{array}{l} ET(3)+t(3,5)=2+10=12 \\ ET(4)+t(4,5)=14+0=17 \end{array} \right\} \quad ET(5)=17$$

$$ET(6) = \max \left\{ \begin{array}{l} ET(4)+t(4,6)=14+4=18 \\ ET(5)+t(5,6)=17+8=25 \end{array} \right\} \quad ET(6)=25$$

2. Βραδύτερος χρόνος του γεγονότος i (Latest time- LT)

$$LT(6)=ET(6)=22$$

$$LT(5)=LT(6)-t(5,6)=22-8=14$$

$$LT(4)=\min \left\{ \begin{array}{l} LT(6)-t(4,6)=22-4=18 \\ LT(5)-t(4,5)=14-0=14 \end{array} \right. \left. \vphantom{\min} \right\} LT(4)=14$$

$$LT(3)=\min \left\{ \begin{array}{l} LT(5)-t(3,5)=14-10=4 \\ LT(4)-t(3,4)=14-6=8 \end{array} \right. \left. \vphantom{\min} \right\} LT(3)=8$$

$$LT(2)=LT(4)-t(2,4)=14-10=4$$

$$LT(1)=\min \left\{ \begin{array}{l} LT(2)-t(1,2)=4-4=0 \\ LT(3)-t(1,3)=4-2=2 \end{array} \right. \left. \vphantom{\min} \right\} LT(1)=0$$

3. Χρονικό περιθώριο του γεγονότος i (Event Slack- ES)

$$ES(1)=LT(1)-ET(1)=0-0=0$$

$$ES(2)=LT(2)-ET(2)=4-4=0$$

$$ES(3)=LT(3)-ET(3)=8-2=6$$

$$ES(4)=LT(4)-ET(4)=14-14=0$$

$$ES(5)=LT(5)-ET(5)=14-14=0$$

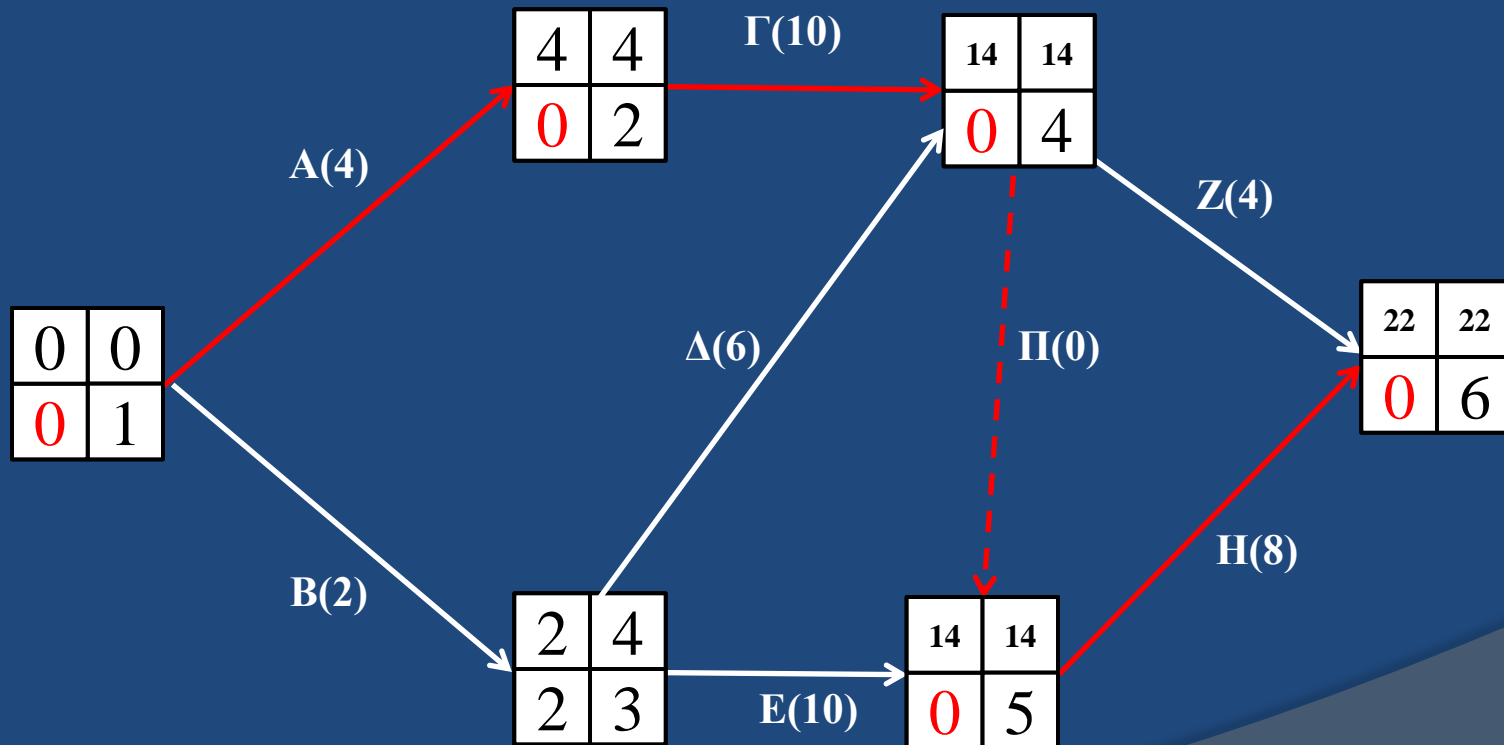
$$ES(5)=LT(6)-ET(6)=22-22=0$$

Γεγονός	ET	LT	ES
1	0	0	0*
2	4	4	0*
3	2	8	6
4	14	14	0*
5	14	14	0*
6	22	22	0*

*Γεγονότα κρίσιμης διαδρομής

Κρίσιμη Διαδρομή

Τα Χρονικά περιθώρια των γεγονότων 1, 2, 4, 5 και 6 είναι 0 και οι δραστηριότητες που αντιστοιχούν σε αυτά είναι οι Α, Γ, Π και Η οι οποίες αποτελούν την **κρίσιμη διαδρομή** του έργου.

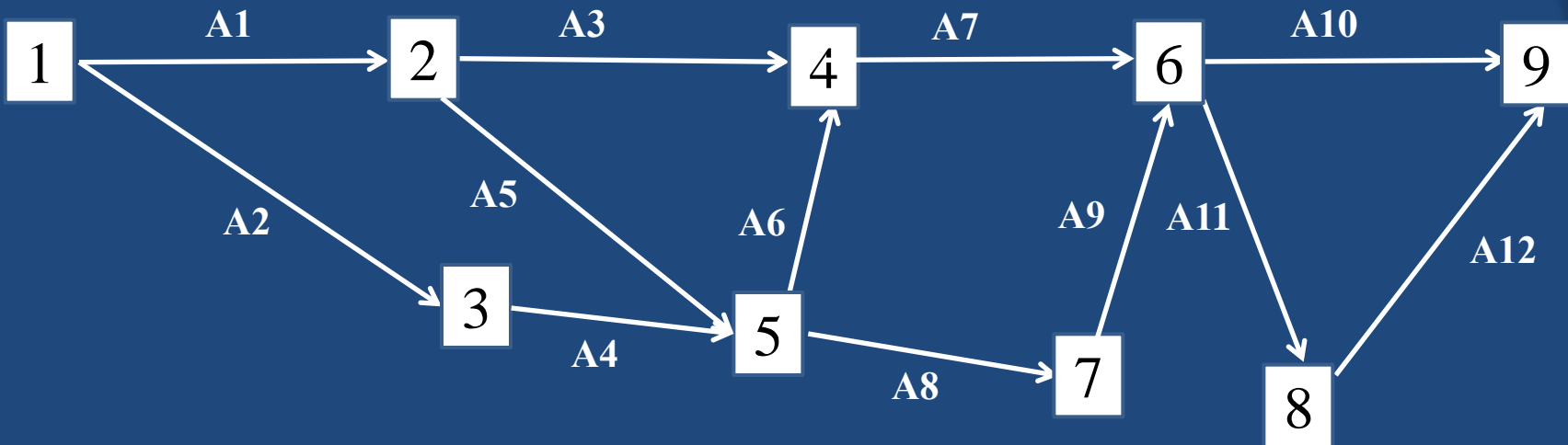


Συνεπώς, ο συντομότερος χρόνος ολοκλήρωσης του έργου είναι ίσος με 22 ημέρες. Ο χρόνος αυτός είναι ο συντομότερος χρόνος στον οποίο μπορούμε να ολοκληρώσουμε το έργο και αντιστοιχεί στη διάρκεια της μεγαλύτερης διαδρομής από το γεγονός έναρξης μέχρι το γεγονός λήξης του.

Παράδειγμα Τοξωτού Δικτύου

Δραστηριότητα	Προαπαιτούμενη
A1	--
A2	--
A3	A1
A4	A2
A5	A1
A6	A4,A5
A7	A3,A6
A8	A4,A5
A9	A8
A10	A7,A9
A11	A7,A9
A12	A11

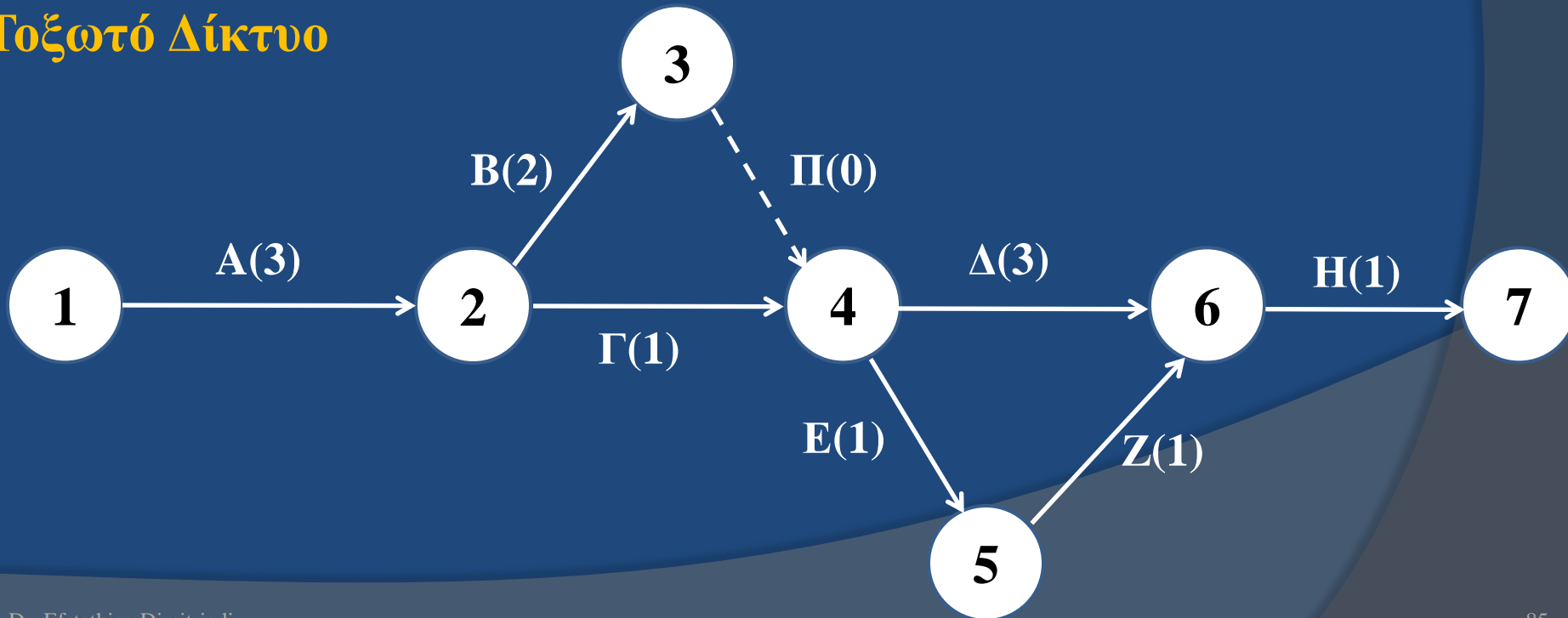
Τοξωτό Δίκτυο



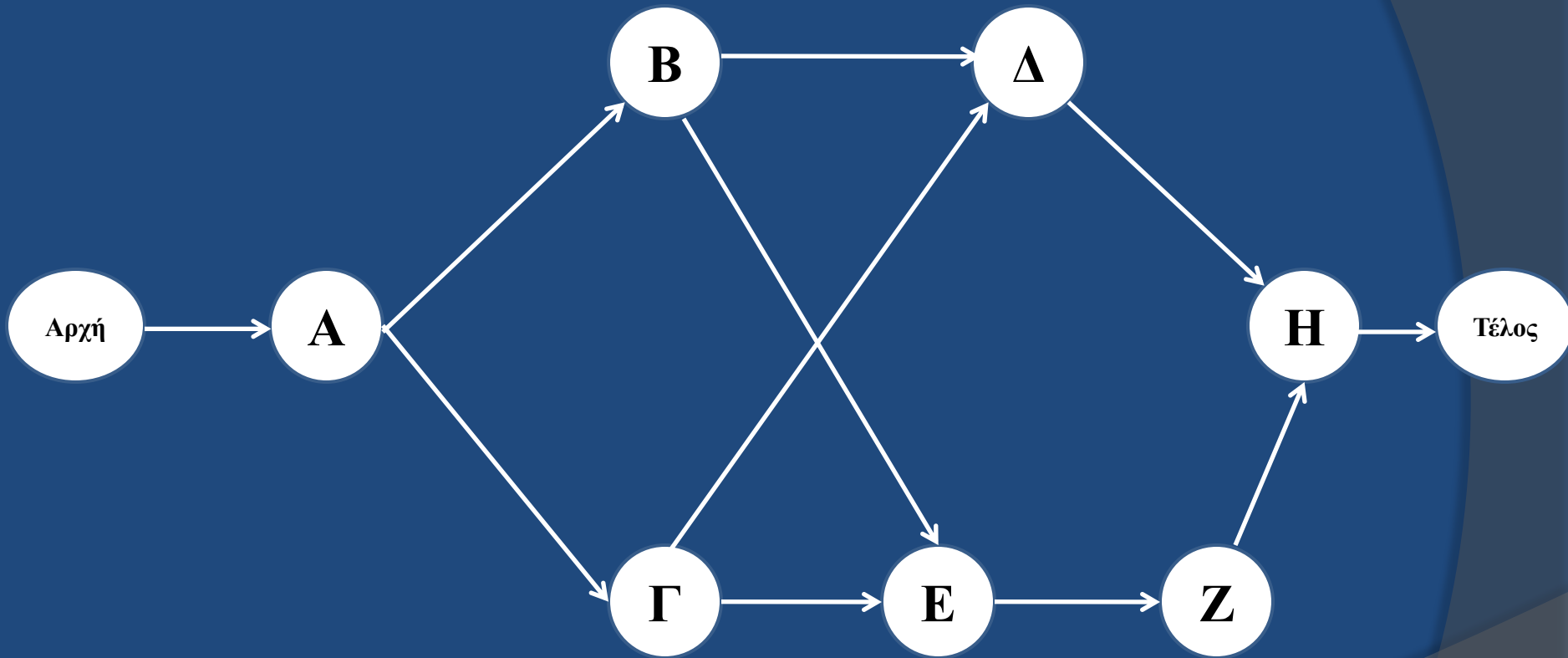
Παράδειγμα Πλασματικής Δραστηριότητας

Δραστηριότητα	Κωδικός Δραστηριότητας	Προαπαιτούμενες Δραστηριότητες	Διάρκεια (μήνες)
Σχεδιασμός σπιτιού και εξασφάλιση χρηματοδότησης	A	-	3
Θεμελίωση	B	A	2
Παραγγελία και προμήθεια υλικών	Γ	A	1
Χτίσιμο σπιτιού	Δ	B,Γ	3
Επιλογή χρωμάτων	E	B,Γ	1
Επιλογή πατωμάτων	Z	E	1
Τελικές εργασίες	H	Δ,Z	1

Τοξωτό Δίκτυο



Κομβικό Δίκτυο



Παράδειγμα: Να κατασκευαστεί το δίκτυο και να υπολογιστεί η κρίσιμη διαδρομή του έργου.

Δραστηριότητα	Κωδικός	Προαπαιτούμενες	Διάρκεια
Επανασχεδιασμός προϊόντος	A	-	6
Επανασχεδιασμός συσκευασίας	B	-	2
Παραγγελία και παραλαβή υλικών για το επανασχεδιασμένο προϊόν	Γ	A	3
Παραγγελία και παραλαβή υλικών για την επανασχεδιασμένη συσκευασία	Δ	B	2
Συναρμολόγηση προϊόντων	E	Γ	4
Σύνθεση συσκευασίας	Z	Δ	1
Δοκιμή του προϊόντος στην αγορά	H	E,Z	1
Αναθεώρηση προϊόντος	Θ	H	6
Αναθεώρηση συσκευασίας	I	Θ	3
Παρουσίαση αποτελεσμάτων στο Συμβούλιο	K	Θ	1
	Λ	I,K	1

Προτάσεις !!!!!

1. Αν δυσκολεύεστε στην κατασκευή του *τοξωτού δικτύου* λόγω πιθανής ύπαρξης *πλασματικών δραστηριοτήτων*, κατασκευάστε *κομβικό δίκτυο*.
2. Εφαρμόστε τον εμπειρικό κανόνα υπολογισμού των *ET, LT, ES* (*γεγονότων*) και *ES, EF, LS, LF, ST* (*δραστηριοτήτων*).
3. Σε τοξωτό δίκτυο προτιμάτε να υπολογίζετε *ET, LT*, και *ES*. *Πρώτα όλα τα πάνω αριστερά κουτάκια (ET), μετά τα πάνω δεξιά κουτάκια (LT) και τέλος τα κάτω αριστερά (ES)*
4. Σε κομβικό δίκτυο προτιμάτε να υπολογίζετε *ES, EF, LS, LF* και *ST*. *Πρώτα όλα τα επάνω κουτάκια (ES, EF) και στη συνέχεια τα κάτω κουτάκια (LS, LF).*

5.8 Διάγραμμα Gantt

Διάγραμμα Gantt

Το πρώτο διάγραμμα Gantt επινοήθηκε στα μέσα της δεκαετίας του 1890 από τον Karol Adamiecki, ένα Πολωνό μηχανικό.

Περίπου 15 χρόνια μετά τον Adamiecki, ο Henry Gantt, ένας Αμερικανός μηχανικός και σύμβουλος επιχειρήσεων, επινόησε τη δική του εκδοχή του διαγράμματος και ήταν αυτή που έγινε ευρέως γνωστή και δημοφιλής στις δυτικές χώρες. Κατά συνέπεια, το όνομα του Henry Gantt συνδέθηκε με διαγράμματα αυτού του τύπου.

Το Διάγραμμα Gantt, το οποίο χρησιμοποιείται συχνά στην διαχείριση έργου, είναι ένα από τα πλέον δημοφιλή και χρήσιμα εργαλεία παρουσίασης των δραστηριοτήτων του έργου στην διάρκεια του χρόνου.

Μας επιτρέπει να δούμε:

1. Ποιές είναι οι δραστηριότητες του έργου
2. Πότε ξεκινάει και πότε τελειώνει κάθε δραστηριότητα
3. Πόσο έχει προγραμματιστεί να διαρκέσει η κάθε δραστηριότητα
4. Πότε οι δραστηριότητες αλληλεπικαλύπτονται και πόσο
5. Την ημερομηνία έναρξης και λήξης ολόκληρου του έργου

Παράδειγμα Διαγράμματος Gantt

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΙΣΟΓΕΙΑΣ ΚΑΤΟΙΚΙΑΣ														
α/α	Χρόνος (μήνες)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	Μελέτη	■	■											
2	Εκσκαφές			■										
3	Σκυροδέματα			■	■	■								
4	Τοιχοποιίες					■	■	■						
5	Επιχρίσματα							■	■					
6	Κουφώματα							■	■	■	■	■		
7	Δάπεδα								■	■	■	■		
8	Ηλεκτρολογικά										■	■	■	
9	Υδραυλικά												■	■
10	Αύλειος χώρος								■	■	■	■	■	■