**Άσκηση PERT**

Για την ολοκλήρωση ενός έργου απαιτείται η εκτέλεση ενός αριθμού δραστηριοτήτων. Οι δραστηριότητες αυτές, οι εκτιμήσεις του αισιόδοξου, πιθανότερου και απαισιόδοξου χρόνου ολοκλήρωσής τους, σε ημέρες, καθώς επίσης και οι περιορισμοί που υπάρχουν σημειώνονται στον παρακάτω πίνακα.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Δραστηριότητα** | **Προαπαιτούμενη** | **Αισιόδοξος χρόνος a** | **Πιθανότερος χρόνος m** | **Απαισιόδοξος χρόνος b** |
| Α | -- | 5 | 13 | 15 |
| Β | Α | 5 | 7 | 9 |
| Γ | Α | 12 | 15 | 18 |
| Δ | B | 1 | 5 | 9 |
| Ε | Γ,Δ | 4 | 5 | 12 |
| Ζ | Γ,Δ | 6 | 7 | 14 |
| Η | Ε,Ζ | 2 | 5 | 8 |

**Ζητούνται:**

1. Να διαμορφωθεί το κατάλληλο τοξωτό δίκτυο το οποίο απεικονίζει γραφικά το έργο που μας απασχολεί και να βρεθεί ο μέσος χρόνος ολοκλήρωσής του.
2. Ποια είναι η μεταβλητότητα και η τυπική απόκλιση της κρίσιμης διαδρομής;
3. Να βρεθούν οι συντομότεροι και οι βραδύτεροι χρόνοι έναρξης και λήξης της κάθε δραστηριότητας
4. Ποια είναι η πιθανότητα στην οποία το έργο μπορεί να ολοκληρωθεί σε διάστημα μέχρι 35, 40 ή 42 ημέρες;
5. Ποια είναι η αναμενόμενη διάρκεια ολοκλήρωσης του έργου με πιθανότητα 99%;

**Απαντήσεις:**

1. Καθώς δεν είναι συγκεκριμένος ο χρόνος ολοκλήρωσης της κάθεδραστηριότητας και επομένως δουλεύουμε σε συνθήκες αβεβαιότητας, θα εφαρμόσουμε την τεχνική PERT. Έτσι, πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε την μέση διάρκεια ολοκλήρωσης της κάθε δραστηριότητας χρησιμοποιώντας τον τύπο και στη συνέχεια την μεταβλητότητα των δραστηριοτήτων με τη χρήση του τύπου



**Πίνακας 1:** Υπολογισμός Μέσης διάρκειας και Μεταβλητότητας δραστηριοτήτων

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Δραστηριότητα** | **a** | **m** | **b** | **Μέση Διάρκεια (μ)** | **Μεταβλητότητα (σ2)** |
| Α | 5 | 13 | 15 | μΑ= (5+4\*13+15)/6=12 | σ2Α= [(15-5)/6]2=2,78 |
| Β | 5 | 7 | 9 | μΒ= (5+4\*7+9)/6=7 | σ2Β=[(9-5)/6]2=0,44 |
| Γ | 12 | 15 | 18 | μΓ= (12+4\*15+18)/6=15 | σ2Γ=[(18-12)/6]2=1 |
| Δ | 1 | 5 | 9 | μΔ= (1+4\*5+9)/6=5 | σ2Δ=[(9-1)/6]2=1,78 |
| Ε | 4 | 5 | 12 | μΕ= (4+4\*5+12)/6=6 | σ2Ε=[(12-4)/6]2=1,78 |
| Ζ | 6 | 7 | 14 | μΖ= (6+4\*7+14)/6=8 | σ2Ζ=[(14-6)/6]2=1,78 |
| Η | 2 | 5 | 8 | μΗ= (2+4\*5+8)/6=5 | σ2Η=[(8-2)/6]2=1 |

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα.

**Πίνακας 2:** Μέση διάρκεια, Μεταβλητότητας και Τυπική Απόκλιση δραστηριοτήτων

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Δραστηριότητα** | **Προαπαιτούμενη** | **Μέση διάρκεια (μ)** | **Μεταβλητότητα (σ2)** | **Τυπική απόκλιση (σ)** |
| Α | -- | 12 | 2,78 | 1,67 |
| Β | Α | 7 | 0,44 | 0,67 |
| Γ | Α | 15 | 1,00 | 1,00 |
| Δ | B | 5 | 1,78 | 1,33 |
| Ε | Γ,Δ | 6 | 1,78 | 1,33 |
| Ζ | Γ,Δ | 8 | 1,78 | 1,33 |
| Η | Ε,Ζ | 5 | 1,00 | 1,00 |

Χρησιμοποιώντας ως διάρκεια της κάθε δραστηριότητας τον μέσο χρόνο που υπολογίσαμε και με δεδομένη την δομή των δραστηριοτήτων με τις εξαρτήσεις θα δημιουργήσουμε το τοξωτό δίκτυο το οποίο απεικονίζει γραφικά το έργο.

1

2

4

3

6

5

7

A

B

Γ

Δ

Ε

Ζ

Η

Π

**Γράφημα 1**: Τοξωτό Δίκτυο Έργου

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τον συντομότερο χρόνο (ET), τον βραδύτερο χρόνο (LT) και το χρονικό περιθώριο των γεγονότων 1,2,3,4,5,6 και 7.

**Πίνακας 3:** Υπολογισμός Συντομότερου χρόνου, Βραδύτερου χρόνου και Χρονικού  
 Περιθωρίου γεγονότων

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Γεγονός** | **ET** | **LT** | **ES** |
| 1 | ET(1)=0 | LT(1)=LT(2)-t(1,2)=12-12=0 | 0\* |
| 2 | ET(2)= ET(1)+t(1,2)=0+12=12 | LT(3)-t(2,3)=22-7=15  LT(2)=min =12  LT(4)-t(2,4)=27-15=12 | 0\* |
| 3 | ET(3)= ET(2)+t(2,3)=12+7=19 | LT(3)=LT(4)-t(3,4)=27-5=22 | 3 |
| 4 | ET(2)+t(2,4)=12+15=27  ET(4)=max =27  ET(3)+t(3,4)=19+5=24 | LT(5)-t(4,5)=35-8=27  LT(4)=min =27  LT(6)-t(4,6)=35-6=29 | 0\* |
| 5 | ET(5)=ET(4)+t(4,5)=27+8=35 | LT(5)=LT(6)-t(5,6)=35-0=35 | 0\* |
| 6 | ET(4)+t(4,6)=27+6=33  ET(6)=max =35  ET(5)+t(5,6)=35+0=35 | LT(6)=LT(7)-t(6,7)=40-5=35 | 0\* |
| 7 | ET(7)=ET(6)+t(6,7)=35+5=40 | LT(7)=40 | 0\* |

Τα γεγονότα τα οποία καθορίζουν την κρίσιμη διαδρομή είναι τα: 1,2,4,5,6 και 7.

Οι δραστηριότητες οι οποίες ορίζονται από αυτά και συνεπώς αποτελούν τις κρίσιμες δραστηριότητες είναι οι Α,Γ,Ζ,Π και Η.

Ο ***μέσος χρόνος ολοκλήρωσης*** του έργου προκύπτει από το άθροισμα των μέσων χρόνων ολοκλήρωσης των ***κρίσιμων δραστηριοτήτων***.

Έτσι θα έχουμε: μ= 12+15+8+0+5=40

1

2

4

3

6

5

7

A

B

Γ

Δ

Ε

Ζ

Η

Π

**Γράφημα 2**: Τοξωτό Δίκτυο Έργου με Κρίσιμη Διαδρομή

1. Η μεταβλητότητα της κρίσιμης διαδρομής προκύπτει από το άθροισμα των μεταβλητοτήτων των δραστηριοτήτων της κρίσιμης διαδρομής.

Έτσι θα έχουμε: σ2 = 2,78+1+1,78+0+1=6,56.

Η τυπική απόκλιση είναι η τετραγωνική ρίζα της μεταβλητότητες:  
 = 2,56



1. Οι συντομότεροι (ES, EF) και οι βραδύτεροι (LS, LF) χρόνοι έναρξης και λήξης των δραστηριοτήτων, καθώς και το συνολικό χρονικό περιθώριο (ST) παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα.

**Πίνακας 4:** Συνοπτικά αποτελέσματα

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Δραστηριότητα** | **ES** | **EF** | **LS** | **LF** | **ST= LS- ES** | **ST= LF- EF** |
| Α | 0 | 12 | 0 | 12 | 0 | 0 |
| Β | 12 | 19 | 15 | 22 | 3 | 3 |
| Γ | 12 | 27 | 12 | 27 | 0 | 0 |
| Δ | 19 | 24 | 22 | 27 | 3 | 3 |
| Ε | 27 | 33 | 29 | 35 | 2 | 2 |
| Ζ | 27 | 35 | 27 | 35 | 0 | 0 |
| Π | 35 | 35 | 35 | 35 | 0 | 0 |
| Η | 35 | 40 | 35 | 40 | 0 | 0 |

Τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα προέκυψαν από τις σχέσεις που περιγράφονται αναλυτικά στους επόμενους δύο πίνακες.

**Πίνακας 5:** Αναλυτικά αποτελέσματα **ES, EF**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Δραστηριότητα** | **Υπολογισμός ES** | **ES** | **Υπολογισμός EF** | **EF** |
| Α | ES(A)=ES(1,2)=ET(1)=0 | ES(A)=0 | EF(A)=EF(1,2)=ES(1,2)+t(1,2)=ET(1)+t(1,2)=0+12=12 | EF(A)=12 |
| Β | ES(B)=ES(2,3)=ET(2)=12 | ES(B)=12 | EF(B)=EF(2,3)=ES(2,3)+t(2,3)=ET(2)+t(2,3)=12+7=19 | EF(Β)=19 |
| Γ | ES(Γ)=ES(2,4)=ET(2)=12 | ES(Γ)=12 | EF(Γ)=EF(2,4)=ES(2,4)+t(2,4)=ET(2)+t(2,4)=12+15=27 | EF(Γ)=27 |
| Δ | ES(Δ)=ES(3,4)=ET(3)=19 | ES(Δ)=19 | EF(Δ)=EF(3,4)=ES(3,4)+t(3,4)=ET(3)+t(3,4)=19+5=24 | EF(Δ)=24 |
| Ε | ES(E)=ES(4,6)=ET(4)=27 | ES(E)=27 | EF(E)=EF(4,6)=ES(4,6)+t(4,6)=ET(4)+t(4,6)=27+6=33 | EF(Ε)=33 |
| Ζ | ES(Ζ)=ES(4,5)=ET(4)=27 | ES(Ζ)=27 | EF(Ζ)=EF(4,5)=ES(4,5)+t(4,5)=ET(4)+t(4,5)=27+8=35 | EF(Ζ)=35 |
| Π | ES(Π)=ES(5,6)=ET(5)=35 | ES(Π)=35 | EF(Π)=EF(5,6)=ES(5,6)+t(5,6)=ET(5)+t(5,6)=35+0=35 | EF(Π)=35 |
| Η | ES(Η)=ES(6,7)=ET(6)=35 | ES(Η)=35 | EF(Η)=EF(6,7)=ES(6,7)+t(6,7)=ET(6)+t(6,7)=35+5=40 | EF(Η)=40 |

**Πίνακας 6:**  Αναλυτικά αποτελέσματα **LS, LF**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Δραστηριότητα** | **Υπολογισμός LS** | **LS** | **Υπολογισμός LF** | **LF** |
| Α | LS(A)= LF(1,2)-t(1,2)=LT(2)-t(1,2)=12-12=0 | LS(A)=0 | LF(A)=LF(1,2)=LT(2)=12 | LF(A)=12 |
| Β | LS(B)= LF(2,3)- t(2,3)= LT(3)-t(2,3)=22-7=15 | LS(B)=15 | LF(B)=LF(2,3)=LT(3)=22 | LF(B)=22 |
| Γ | LS(Γ)= LF(2,4)- t(2,4)= LT(4)-t(2,4)=27-15=12 | LS(Γ)=12 | LF(Γ)=LF(2,4)=LT(4)=27 | LF(Γ)=27 |
| Δ | LS(Δ)= LF(3,4)- t(3,4)= LT(4)-t(3,4)=27-5=22 | LS(Δ)=22 | LF(Δ)=LF(3,4)=LT(4)=27 | LF(Δ)=27 |
| Ε | LS(E)= LF(4,6)- t(4,6)= LT(6)-t(4,6)=35-6=29 | LS(E)= 29 | LF(E)=LF(4,6)=LT(6)=35 | LF(E)=35 |
| Ζ | LS(Ζ)= LF(4,5)- t(4,5)= LT(5)-t(4,5)=35-8=27 | LS(Ζ)=27 | LF(Ζ)=LF(4,5)=LT(5)=35 | LF(Ζ)=35 |
| Π | LS(Π)= LF(5,6)- t(5,6)= LT(6)-t(5,6)=35-0=35 | LS(Π)=35 | LF(Π)=LF(5,6)=LT(6)=35 | LF(Π)=35 |
| Η | LS(Η)= LF(6,7)- t(6,7)= LT(7)-t(6,7)=40-5=35 | LS(Η)=35 | LF(Η)=LF(6,7)=LT(7)=40 | LF(Η)=40 |

Από τα ανωτέρω αποτελέσματα προκύπτουν εύκολα οι συντομότεροι χρόνοι έναρξης (ES) και λήξης (EF) της κάθε δραστηριότητας.

Επίσης και οι βραδύτεροι χρόνοι έναρξης (LS) και λήξης (LF).

**!!!!** Στη διαδικασία υπολογισμού των ES, EF, LS και LF χρησιμοποιήσαμε τοξωτό δίκτυο και εκμεταλλευτήκαμε τον συντομότερο (ET) και τον βραδύτερο (LT) χρόνο των γεγονότων τα οποία καθόριζαν κάθε δραστηριότητα.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τους ES, EF, LS και LF χρόνους, δημιουργώντας το κομβικό δίκτυο του έργου και εργαζόμενοι μόνο με τις δραστηριότητες.

A

Β

Γ

Ε

Δ

Ζ

Η

**Γράφημα 3**: Κομβικό Δίκτυο Έργου

**Πίνακας 8:** Αναλυτικάαποτελέσματα **ES, EF** με τη χρήση δραστηριοτήτων

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Δραστηριότητα** | **Υπολογισμός ES** | **ES** | **Υπολογισμός EF** | **EF** |
| Α | ES(A)= 0 | ES(A)=0 | EF(A)= ES(A)+12=0+12=12 | EF(A)=12 |
| Β | ES(B)=EF(A)=12 | ES(B)=12 | EF(B)= ES(B)+7=12+7=19 | EF(Β)=19 |
| Γ | ES(Γ)=EF(A)=12 | ES(Γ)=12 | EF(Γ)=ES(Γ)+15=12+15=27 | EF(Γ)=27 |
| Δ | ES(Δ)=EF(B)=19 | ES(Δ)=19 | EF(Δ)=ES(Δ)+5=19+5=24 | EF(Δ)=24 |
| Ε | EF(Γ)=27  ES(E)=max  EF(Δ)=24 | ES(E)=27 | EF(E)=ΕS(E)+6=27+6=33 | EF(Ε)=33 |
| Ζ | EF(Γ)=27  ES(Ζ)=max  EF(Δ)=24 | ES(Ζ)=27 | EF(Ζ)=ES(Ζ)+8=27+8=35 | EF(Ζ)=35 |
| Η | EF(Ε)=33 ES(Η)=max  EF(Ζ)=35 | ES(Η)=35 | EF(Η)= ES(Η)+5=40 | EF(Η)=40 |

**Πίνακας 9:** Αναλυτικάαποτελέσματα **LS, LF** με τη χρήση δραστηριοτήτων

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Δραστηριότητα** | **Υπολογισμός LS** | **LS** | **Υπολογισμός LF** | **LF** |
| Α | LS(A)= LF(Α)-12=12-12=0 | LS(A)=0 | LS(B)=15  LF(A)=min  LS(Γ)=12 | LF(A)=12 |
| Β | LS(B)= LF(Β)-7=22-7=15 | LS(B)=15 | LF(B)=LS(Δ)= 22 | LF(B)=22 |
| Γ | LS(Γ)= LF(Γ)-15=27-15=12 | LS(Γ)=12 | LS(E)=29  LF(Γ)=min  LS(Z)=27 | LF(Γ)=27 |
| Δ | LS(Δ)= LF(Δ)-5=27-5=22 | LS(Δ)=22 | LS(E)=29  LF(Δ)=min  LS(Z)=27 | LF(Δ)=27 |
| Ε | LS(E)= LF(Ε)-6==35-6=29 | LS(E)= 29 | LF(E)=LS(H)=35 | LF(E)=35 |
| Ζ | LS(Ζ)= LF(Ζ)-8=35-8=27 | LS(Ζ)=27 | LF(Ζ)=LS(H)=35 | LF(Ζ)=35 |
| Η | LS(Η)= LF(Η)-5= 40-5=35 | LS(Η)=35 | LF(Η)=ΕS(Η)=40 | LF(Η)=40 |

**Πίνακας 10:** Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Δραστηριότητα** | **ES** | **EF** | **LS** | **LF** | **ST= LS- ES** | **ST= LF- EF** |
| Α | 0 | 12 | 0 | 12 | 0 | 0 |
| Β | 12 | 19 | 15 | 22 | 3 | 3 |
| Γ | 12 | 27 | 12 | 27 | 0 | 0 |
| Δ | 19 | 24 | 22 | 27 | 3 | 3 |
| Ε | 27 | 33 | 29 | 35 | 2 | 2 |
| Ζ | 27 | 35 | 27 | 35 | 0 | 0 |
| Η | 35 | 40 | 35 | 40 | 0 | 0 |

A

Β

Γ

Ε

Δ

Ζ

Η

**Γράφημα 3**: Κομβικό Δίκτυο Έργου με Κρίσιμη Διαδρομή

1. Υποθέτοντας ότι ο χρόνος ολοκλήρωσης του έργου συνολικά είναι μια τυχαίαμεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή (μ) το άθροισμα των μέσων τιμών των χρόνων ολοκλήρωσης των κρίσιμων δραστηριοτήτων που την αποτελούν και μεταβλητότητα (σ2) το άθροισμα των μεταβλητοτήτων τους θέλουμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες:

α) P(t<=35), β) P(t <=40) και γ) P(t<=42).

Έχουμε δεδομένο τον μέσο χρόνο ολοκλήρωσης μ=40 και την τυπική απόκλιση

σ = 2,56. Έτσι θα έχουμε:



α) P(t<=35)=



Από τους πίνακες της κανονικής κατανομής παίρνουμε την πιθανότητα 0,4744 που αντιστοιχεί στην τιμή 1,95 και την αυξάνουμε κατά 0,5. Έτσι έχουμε 0,5+0,4744=0,9744. Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα να ολοκληρωθεί το έργο σε διάστημα μέχρι 35 ημέρες είναι: 1-0,9744=0,0256 =2,56%.



β) P(t <=40)



Από τους πίνακες της κανονικής κατανομής παίρνουμε την πιθανότητα 0,0000 που αντιστοιχεί στην τιμή 0 και την αυξάνουμε κατά 0,5. Έχουμε 0,5+0,0000=0,5000 και συνεπώς η πιθανότητα να ολοκληρωθεί το έργο σε διάστημα μέχρι 40 ημέρες είναι 50%.



γ) P(t<=42)



Από τους πίνακες της κανονικής κατανομής παίρνουμε την πιθανότητα 0,2823 που αντιστοιχεί στην τιμή 0,78 και την αυξάνουμε κατά 0,5. Έχουμε 0,5+0,2823=0,7823 και συνεπώς η πιθανότητα να ολοκληρωθεί το έργο σε διάστημα μέχρι 42 ημέρες είναι 78,23%.

1. Γνωρίζουμε την πιθανότητα και αναζητούμε την τιμή του χρόνου που αντιστοιχεί σε αυτήν. Δηλαδή: P(t<=ti)=0,99. Αφαιρούμε από αυτή την πιθανότητα το 0,5 και αναζητούμε στον πίνακα την τιμή της μεταβλητής Ζ που αντιστοιχεί σε αυτή την πιθανότητα. Αναζητούμε δηλαδή την τιμή Ζ που αντιστοιχεί στην πιθανότητα 0,99-0,5=0,49. Η τιμή Ζ είναι 2,33.



Έτσι έχουμε:

ημέρες είναι η αναμενόμενη διάρκεια ολοκλήρωσης του έργου με πιθανότητα 99%;.