Hellenic Republic
INTERNATIONAL HELLENIC UNIVERSITY
University Center for International Programmes of Studies

Τμήμα Διοικητικής Επιστήμης και Τεχνολογίας

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών:

Διοίκηση Επιχειρήσεων και Οργανισμών για Στελέχη

mba executive

Ποσοτικές Μέθοδοι για Στελέχη Επιχειρήσεων
Quantitative Methods for Managers
Έλεγχος Υποθέσεων-Hypotheses Testing

by
Dr. Efstathios Dimitriadis
Mathematic
Ph.D in Applied Statistics
M.Sc in Statistics and Demography
M.Sc in Quality Assurance

Τι είναι ο έλεγχος υποθέσεων στη στατιστική;

Ο έλεγχος υποθέσεων είναι μια μέθοδος στατιστικής ανάλυσης στην οποία δοκιμάζετε τις υποθέσεις σας σχετικά με μια παράμετρο του πληθυσμού

Παραδείγματα στατιστικών υποθέσεων από την πραγματική ζωή

- Ένας δάσκαλος υποθέτει ότι το 60% των μαθητών του κολεγίου του προέρχονται από οικογένειες κατώτερης και μεσαίας τάξης.
- Ένας γιατρός πιστεύει ότι το 3D (Δίαιτα, Δόση και Πειθαρχία) είναι 90% αποτελεσματικό για διαβητικούς ασθενείς.

Τι είναι ο έλεγχος ερευνητικών υποθέσεων;

Ο έλεγχος υποθέσεων είναι μια συστηματική διαδικασία που προέρχεται από ερευνητικό ερώτημα και αποφασίζει εάν τα αποτελέσματα μιας ερευνητικής μελέτης υποστηρίζουν μια συγκεκριμένη θεωρία που μπορεί να εφαρμοστεί στον πληθυσμό. Επιπλέον, είναι ένα στατιστικό τεστ που χρησιμοποιείται για να προσδιοριστεί εάν η υπόθεση που υποτίθεται από τα δεδομένα του δείγματος είναι αληθινή για ολόκληρο τον πληθυσμό. Ο σκοπός του ελέγχου της υπόθεσης είναι να εξαχθεί ένα συμπέρασμα σχετικά με τον πληθυσμό ενδιαφέροντος με βάση το τυχαίο δείγμα που ελήφθη από αυτόν τον πληθυσμό.

Έλεγχος Υποθέσεων

Μηδενική Υπόθεση H_0

Στον έλεγχο των υποθέσεων ξεκινάμε κάνοντας μια δοκιμαστική υπόθεση σχετικά με μια παράμετρο πληθυσμού. Αυτή η δοκιμαστική υπόθεση ονομάζεται ***Μηδενική Υπόθεση*** και συμβολίζεται με H_0.

Εναλλακτική Υπόθεση H_1

Στη συνέχεια ορίζουμε μια άλλη υπόθεση, που ονομάζεται ***Εναλλακτική Υπόθεση***, η οποία είναι το αντίθετο από αυτό που αναφέρεται στην μηδενική υπόθεση. Η εναλλακτική υπόθεση συμβολίζεται με H_1.

Έλεγχος Υποθέσεων

Στη διαδικασία ελέγχου των υποθέσεων μπορούν να γίνουν δύο είδη σφαλμάτων:

Λάθος τύπου I : Απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση ενώ είναι σωστή (a)

Λάθος τύπου II : Δεχόμαστε την μηδενική υπόθεση ενώ είναι λάθος (β)

		Πραγματική Κατάσταση	
		H_0 Αληθής	**H_0 Ψευδής**
Στατιστική Απόφαση	**Απόρριψη H_0**	Type I Error με πιθανότητα a	Σωστή απόφαση με πιθανότητα 1-β
	Αποδοχή H_0	Σωστή απόφαση με πιθανότητα 1-α	Type II Error με πιθανότητα β

Η μέθοδος του ελέγχου υποθέσεων μπορεί να συνοψιστεί σε έξι βήματα

1ο βήμα: **Διατύπωση των υποθέσεων**

Αρχικά, ο ερευνητής δηλώνει μια μηδενική υπόθεση για μια τιμή του πληθυσμού (H_0) και μια εναλλακτική υπόθεση (H_1) η οποία έρχεται σε αντίθεση με τη μηδενική υπόθεση.

Για παράδειγμα, μπορεί να θέλουμε να ελέγξουμε τον ισχυρισμό ότι ο μέσος αριθμός ωρών που παρακολουθούν τηλεόραση καθημερινά τα παιδιά στην Ελλάδα είναι 3 ώρες.

2ο βήμα: **Κριτήρια επιλογής του κατάλληλου ελέγχου**

a. Έλεγχος των απαραίτητων προϋποθέσεων.

b. Καθορισμός της κατανομής και του τύπου που θα χρησιμοποιηθεί.

c. Καθορισμός του επιπέδου εμπιστοσύνης 1-α.

3ο βήμα: **Μαρτυρία του δείγματος**

Συλλογή πληροφοριών από το δείγμα (μέγεθος, μέση τιμή).

4ο βήμα: **Υπολογισμός της τιμής Ζ ή t του κριτηρίου**

5ο βήμα: Σύγκριση της τιμής του κριτηρίου με την κριτική τιμή ελέγχου

6ο βήμα: **Συμπεράσματα και ερμηνεία του αποτελέσματος.**

Η ερευνητική υπόθεση αναφέρεται γενικά ως εναλλακτική υπόθεση. Το συμπέρασμα ότι η ερευνητική υπόθεση είναι αληθινή μπορεί να συναχθεί εάν απορριφθεί η μηδενική υπόθεση.

!!! Οι μηδενικές και εναλλακτικές υποθέσεις είναι ανταγωνιστικές δηλώσεις σχετικά με τον πληθυσμό. !!! Είτε η H_0 είναι αληθής είτε η H_1, αλλά όχι και οι δύο. !!! Στην ιδανική περίπτωση, η διαδικασία ελέγχου της υπόθεσης θα πρέπει να οδηγήσει στην αποδοχή της H_0 όταν η H_0 είναι αληθής και στην απόρριψη της H_0 όταν η H_1 είναι αληθής.

Εφαρμογή:

Τα τελευταία χρόνια η μέση διάρκεια μιας εβδομάδας εργασίας για τον πληθυσμό των εργαζομένων ήταν 39,2 ώρες. Φέτος, ένα τυχαίο δείγμα 112 εργαζομένων έδειξε μέσο όρο 38,5 ωρών και τυπική απόκλιση 4,5 ωρών

1. Μηδενική Υπόθεση H_0: $\mu = 39,2$

2α. Πιστεύετε ότι άλλαξε η μέση διάρκεια μιας εβδομάδας εργασίας;

Εναλλακτική υπόθεση H_1: $\mu \neq 39,2$

2β. Πιστεύετε ότι η μέση διάρκεια μιας εβδομάδας εργασίας είναι μεγαλύτερη από 39,2 ώρες;

Εναλλακτική υπόθεση H_1: $\mu > 39,2$

2γ. Πιστεύετε ότι η μέση διάρκεια μιας εβδομάδας εργασίας είναι μικρότερη από 39,2 ώρες;

Εναλλακτική υπόθεση H_1: $\mu < 39,2$

Έλεγχος Υποθέσεων

A. Έλεγχος Υποθέσεων (Ένας Πληθυσμός)

B. Έλεγχος Υποθέσεων (Δύο Πληθυσμοί)

C. Έλεγχος Υποθέσεων (Περισσότεροι από Δύο Πληθυσμοί)

Α. Έλεγχος Υποθέσεων (Ένας Πληθυσμός)

Α1. Έλεγχος Μέσου του Πληθυσμού

Α1.1 Έλεγχος Μέσου του Πληθυσμού: Μεγάλο Δείγμα

Α1.2 Έλεγχος Μέσου του Πληθυσμού: Μικρό Δείγμα

Α2. Έλεγχος της Αναλογίας του Πληθυσμού

A1.1 Έλεγχος Μέσου του Πληθυσμού: Μεγάλο Δείγμα

Μονόπλευρος έλεγχος	Μονόπλευρος έλεγχος	Αμφίπλευρος Έλεγχος
H_0: $\mu=\mu_0$	H_0: $\mu=\mu_0$	H_0: $\mu=\mu_0$
H_1: $\mu> \mu_0$	H_1: $\mu< \mu_0$	H_1: $\mu\neq\mu_0$

Test Statistic: σ Γνωστή $Z=\frac{(\bar{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$

Test Statistic: σ εκτιμημένη από s $Z=\frac{(\bar{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{s}$

Type Error I or Significance level *a*

Κανόνας Απόρριψης

Απόρριψη H_0 αν $Z>Z_a$ Απόρριψη H_0 αν $Z<-Z_a$ Απόρριψη H_0 αν $|Z|>Z_{a/2}$

Παράδειγμα:

Η ικανοποίηση από την εργασία είναι πολύ σημαντικός παράγοντας για την αύξηση της αποδοτικότητας των εργαζομένων. Για το λόγο αυτό μια επιχείρηση θέλοντας να γνωρίζει τον βαθμό ικανοποίησης των εργαζομένων της, σε τακτά χρονικά διαστήματα, τούς υποβάλει σε τεστ χρησιμοποιώντας ερωτηματολόγιο. Στο πιο πρόσφατο τεστ δείγμα 36 εργαζομένων έδωσε μέσο βαθμό ικανοποίησης =69. Αν κατά το παρελθόν ο μέσος βαθμός ικανοποίησης όλων των εργαζομένων στην επιχείρηση ήταν μ=68 με τυπική απόκλιση σ=4, να ελεγχθεί η υπόθεση ότι ο βαθμός ικανοποίησης των εργαζομένων άλλαξε. Η κατανομή των δειγματικών μέσων είναι κανονική (α= 0,05).

Λύση

Μηδενική υπόθεση H_0: μ=68

Εναλλακτική υπόθεση H_1: $\mu \neq 68$

$$Z = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(69-68)\cdot\sqrt{36}}{4} = 1{,}5$$

Για α=0,05 και δίπλευρο τεστ θα υπολογίσουμε από τους πίνακες την τιμή $Z_{0,05/2} = Z_{0,025} = 1{,}96$

$$|Z| = 1{,}5 < 1{,}96 = Z_{0,025}$$

Έχοντας υπόψη τα κριτήρια απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης είμαστε υποχρεωμένοι να μην την απορρίψουμε (να την δεχτούμε)

Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ο μέσος βαθμός ικανοποίησης των εργαζομένων στο πρόσφατο τεστ δεν έχει αλλάξει.

A1.2 Έλεγχος Μέσου του Πληθυσμού: Μικρό Δείγμα

Μονόπλευρος έλεγχος

H_0: $\mu = \mu_0$

H_1: $\mu > \mu_0$

Μονόπλευρος έλεγχος

H_0: $\mu = \mu_0$

H_1: $\mu < \mu_0$

Αμφίπλευρος Έλεγχος

H_0: $\mu = \mu_0$

H_1: $\mu \quad \mu_0$

Test Statistic: σ εκτιμημένη από s $t = \dfrac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}$ **d.f =n-1**

Type Error I or Significance level *a*

Κανόνας Απόρριψης

Απόρριψη H_0 αν $t > t_a$ Απόρριψη H_0 αν $t <- t_a$ Απόρριψη H_0 αν $|t| > t_{a/2}$

A2. Έλεγχος Αναλογίας Πληθυσμού

Με στόχο την επίτευξη των καλλίτερων αποτελεσμάτων, είναι απαραίτητο να λάβουμε υπόψη τις παρακάτω συνθήκες:

1. Το μέγεθος του δείγματος πρέπει να είναι μεγαλύτερο των 20.
2. np>5 και n(1-p)>5
3. Το δείγμα πρέπει να είναι μικρότερο του 10% του πληθυσμού.

Μονόπλευρος έλεγχος	Μονόπλευρος έλεγχος	Αμφίπλευρος Έλεγχος
$H_0: p=p_0$	$H_0: p=p_0$	$H_0: p=p_0$
$H_1: p>p_0$	$H_1: p<p_0$	$H_1: p\neq p_0$

Standard Deviation of p: $\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}$

Test Statistic: $Z = \dfrac{(\bar{p}-p_0)}{\sigma_{\bar{p}}}$

Κανόνας Απόρριψης

Απόρριψη H_0 αν $Z>Z_a$ | Απόρριψη H_0 αν $Z<-Z_a$ | Απόρριψη H_0 αν $|Z| > Z_{a/2}$

Έλεγχος Υποθέσεων (Δύο πληθυσμοί)

B1 Έλεγχος για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο πληθυσμών

B1.1 Μεγάλα δείγματα: n_1 και n_2 >30 (Ανεξάρτητα δείγματα)

B1.2 Μικρά δείγματα: n_1 και /ή n_2 <=30 (Ανεξάρτητα δείγματα)

B1.3 Εξαρτημένα δείγματα

B2 Έλεγχος για την διαφορά των αναλογιών δύο πληθυσμών

B1.1 Έλεγχος για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο πληθυσμών: Μεγάλα, Ανεξάρτητα δείγματα

Μονόπλευρος έλεγχος	Μονόπλευρος έλεγχος	Αμφίπλευρος έλεγχος
$H_0: \mu_1-\mu_2=0$	$H_0: \mu_1-\mu_2=0$	$H_0: \mu_1-\mu_2=0$
$H_1: \mu_1-\mu_2>0$	$H_1: \mu_1-\mu_2<0$	$H_1: \mu_1-\mu_2\neq 0$

σ_1 και σ_2 γνωστές: Στατιστικός Έλεγχος

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Επίπεδο σημαντικότητας *a*

σ_1 and σ_2 εκτιμώμενες από s_1 και s_2

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Κανόνας Απόρριψης:

Απορρίπτουμε την H_0 όταν $Z>Z_a$	Απορρίπτουμε την H_0 όταν $Z<-Z_a$	Απορρίπτουμε την H_0 όταν $\lvert Z \rvert > Z_{a/2}$

B1.2 Έλεγχος για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο πληθυσμών: Μικρά, Ανεξάρτητα δείγματα

Efstathios Dimitriadis

16

Ξεκινάμε με την υπόθεση ότι: $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2)$

Μονόπλευρος έλεγχος	Μονόπλευρος έλεγχος	Αμφίπλευρος έλεγχος
$H_0: \mu_1-\mu_2=0$	$H_0: \mu_1-\mu_2=0$	$H_0: \mu_1-\mu_2=0$
$H_1: \mu_1-\mu_2>0$	$H_1: \mu_1-\mu_2<0$	$H_1: \mu_1-\mu_2 \neq 0$

Εκτίμηση της σ^2: $$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

Επίπεδο σημαντικότητας *a*

Στατιστικός έλεγχος $$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

d.f : n_1+n_2-2

Κανόνας Απόρριψης:

Απορρίπτουμε την H_0 όταν $t>t_a$	Απορρίπτουμε την H_0 όταν $t<-t_a$	Απορρίπτουμε την H_0 όταν $\lvert t\rvert > t_{a/2}$

B1.3 Έλεγχος για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο πληθυσμών:: Εξαρτημένα δείγματα

a = Επίπεδο σημαντικότητας

1-a = Επίπεδο εμπιστοσύνης

Ζευγαρωτές διαφορές: $d_i = x_{1i} - x_{2i}$

χ_{1i}, χ_{2i} είναι οι τιμές από το 1^o και το 2^o δείγμα

Μέση τιμή διαφορών: $\bar{d} = \dfrac{\sum d_i}{n}$

Τυπική απόκλιση: $s_d = \sqrt{\dfrac{\sum d_i^2 - \left[\dfrac{(\sum d_i)^2}{n}\right]}{n-1}}$

Στατιστικός έλεγχος:

d.f : n-1

$$t = \frac{(\bar{d} - \mu_d) \cdot \sqrt{n}}{s_d}$$

$\mu_1 - \mu_2 = \mu_d$

Μονόπλευρος έλεγχος	Μονόπλευρος έλεγχος	Αμφίπλευρος έλεγχος
H_0: $\mu_d = 0$	H_0: $\mu_d = 0$	H_0: $\mu_d = 0$
H_1: $\mu_d > 0$	H_1: $\mu_d < 0$	H_1: $\mu_d \neq 0$
Απορρίπτουμε την H_0 όταν $t > t_a$	Απορρίπτουμε την H_0 όταν $t < -t_a$	Απορρίπτουμε την H_0 όταν $\lvert t \rvert > t_{a/2}$

Efstathios Dimitriadis

B2. Έλεγχος για τη διαφορά μεταξύ των Αναλογιών δύο πληθυσμών p_1-p_2

a = Επίπεδο Σημαντικότητας και 1-a = Επίπεδο Εμπιστοσύνης

p_1 = Αναλογία Πληθυσμού 1

p_2 = Αναλογία Πληθυσμού 2

$\bar{p}_1$ = Αναλογία Δείγματος από τον πληθυσμό 1 $\bar{p}_1 = \dfrac{x}{n_1}$

$\bar{p}_2$ = Αναλογία Δείγματος από τον πληθυσμό 2 $\bar{p}_2 = \dfrac{x}{n_2}$

Για την επίτευξη καλύτερων αποτελεσμάτων πρέπει να ικανοποιούνται οι παρακάτω υποθέσεις:

1. Κάθε δείγμα πρέπει να είναι μεγαλύτερο του 20.
2. $n_1p_1>5$, $n_1(1-p_1)>5$, $n_2p_2>5$, $n_2(1-p_2)>5$
3. Κάθε δείγμα δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερο του 10% του αντιστοίχου πληθυσμού.

Τυπική Απόκλιση: $\sigma_{\overline{p}_1-\overline{p}_2}=\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$

Στατιστικός Έλεγχος: $Z=\dfrac{(\overline{p}_1-\overline{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sigma_{\overline{p}_1-\overline{p}_2}}$

Όταν p_1 και p_2 δεν είναι γνωστά, υποθέτουμε ότι $p_1= p_2= p$

και η τιμή του p εκτιμάται από: $\overline{p}=\dfrac{n_1\overline{p}_1+n_2\overline{p}_2}{n_1+n_2}$

Σημειακός Εκτιμητής της $\sigma_{\overline{p}_1-\overline{p}_2}$: $s_{\overline{p}_1-\overline{p}_2}=\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n})}$

Στατιστικός Έλεγχος : $Z=\dfrac{(\overline{p}_1-\overline{p}_2)-(p_1-p_2)}{s_{\overline{p}_1-\overline{p}_2}}$

Μονόπλευρος έλεγχος

H_0: $p_1-p_2=0$

H_1: $p_1-p_2>0$

Απορρίπτουμε την H_0 όταν $Z>Z_a$

Μονόπλευρος έλεγχος

H_0:$p_1-p_2=0$

H_1:$p_1-p_2<0$

Απορρίπτουμε την H_0 όταν $Z<-Z_a$

Αμφίπλευρος έλεγχος

H_0:$p_1-p_2=0$

H_1:$p_1-p_2\neq 0$

Απορρίπτουμε την H_0 όταν $|Z|>Z_{a/2}$