Hellenic Republic

INTERNATIONAL HELLENIC UNIVERSITY

University Center for International Programmes of Studies

Τμήμα Διοικητικής Επιστήμης και Τεχνολογίας

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών:

Διοίκηση Επιχειρήσεων και Οργανισμών για Στελέχη

mba executive

Ποσοτικές Μέθοδοι για Στελέχη Επιχειρήσεων
Quantitative Methods for Managers
Κατανομές- Distributions

by

Dr. Efstathios Dimitriadis

Mathematic

Ph.D in Applied Statistics

M.Sc in Statistics and Demography

M.Sc in Quality Assurance

ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Distributions

Στόχοι:

- Η κατανόηση της έννοιας της κατανομής
- Η ικανότητα διάκρισης μεταξύ κατανομής συχνοτήτων και κατανομής πιθανοτήτων
- Η κατανόηση της έννοιας της πιθανότητας και των εφαρμογών της
- Η ικανότητα διάκρισης μεταξύ συνεχούς και ασυνεχούς κατανομής
- Η ικανότητα επιλογής και εφαρμογής της κατάλληλης κατανομής

Κατανομές Συχνοτήτων (Frequency Distributions)

Πλήθος Λαθών ανά Σελίδα X_i	Πλήθος Σελίδων F_i
0	70
1	140
2	245
3	175
4	49
5	21
Σύνολο	700

Κατανομές πιθανοτήτων (Probability Distributions)

Πλήθος Λαθών ανά Σελίδα X_i	Πιθανότητα P_i
0	0,10
1	0,20
2	0,35
3	0,25
4	0,07
5	0,03
Σύνολο	1,00

Βασικές έννοιες

Πείραμα τύχης (Experiment).

Πείραμα τύχης είναι κάθε διαδικασία η οποία παράγει καλώς καθορισμένα αποτελέσματα. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε απλή επανάληψη ένα και μόνο ένα πιθανό αποτέλεσμα θα εμφανιστεί.

Δειγματικός χώρος πειράματος τύχης (Sample space).

Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης (Experimental outcomes) προσδιορίζει το Δειγματικό χώρο του πειράματος.

Βασικές έννοιες

Ενδεχόμενο (Event).
Κάθε δυνατό αποτέλεσμα κατά την εκτέλεση ενός πειράματος τύχης.

Βασική αρχή απαρίθμησης (Counting Rules).
Αν ένα πείραμα τύχης μπορεί να περιγραφεί σαν μία διαδικασία k βημάτων για την οποία υπάρχουν n1 δυνατά αποτελέσματα στο 1ο βήμα, n2 δυνατά αποτελέσματα στο 2ο βήμα και nk στο τελευταίο βήμα, τότε ο συνολικός αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων δίνεται από το γινόμενο: (n1)·(n2)·……..·(nk).

Βασικές έννοιες

Τυχαία Μεταβλητή (Random Variable).

Τυχαία Μεταβλητή είναι η αριθμητική περιγραφή των αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης.

Ασυνεχής τυχαία μεταβλητή (Discrete Random Variable).

Ασυνεχής τυχαία μεταβλητή είναι αυτή που παίρνει ένα πεπερασμένο πλήθος τιμών ή ένα άπειρο πλήθος τιμών από μία ακολουθία τιμών, όπως: 0,1,2,…

Βασικές έννοιες

Συνεχής τυχαία μεταβλητή (Continous Random Variable) είναι αυτή που παίρνει οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος ή ενός συνόλου διαστημάτων.

Συνάρτηση πιθανότητας (Probability Function)

Για μία τυχαία μεταβλητή η κατανομή πιθανοτήτων προσδιορίζεται από μία συνάρτηση πιθανότητας P(x) για την οποία ισχύουν:

$$\mathbf{0 \leq P(x) \leq 1}$$

$$\sum P(x_i) = 1$$

Κατανομές πιθανοτήτων ασυνεχούς τυχαίας μεταβλητής (Probability Distributions of a Discrete Random Variable)

1. Διωνυμική κατανομή
2. Κατανομή Poisson και
3. Υπεργεωμετρική κατανομή

Διωνυμική κατανομή

- Το πείραμα αποτελείται από μια σειρά πανομοιότυπων δοκιμών.
- Σε κάθε δοκιμή δύο μόνο αποτελέσματα μπορεί να υπάρχουν. Το ένα το αναφέρουμε σαν επιτυχία (success) και το άλλο σαν αποτυχία (failure).
- Την πιθανότητα της επιτυχίας τη συμβολίζουμε με p, την πιθανότητα της αποτυχίας με q και είναι σταθερές σε όλη τη διάρκεια του πειράματος.
- Ισχύει p+q=1
- Οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες.
- Η τυχαία μεταβλητή Χ μετράει τον αριθμό των επιτυχιών και μπορεί να παίρνει τιμές από 0 έως n.

Διωνυμική κατανομή $X \sim B(n,p)$

Συνάρτηση Πιθανότητας

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^{x} \cdot q^{n-x}$$ με $\chi = 0,1,2,3,\ldots,n$.

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Διωνυμική κατανομή $X \sim B(n,p)$

Παράμετροι Διωνυμικής Κατανομής

Μέση τιμή: $E(x) = \mu = np$

Τυπική απόκλιση: $\sigma = \sqrt{npq}$

Διακύμανση: $Var(X)=\sigma^2= npq$

Συντελεστής Ασυμμετρίας: $S_k = \dfrac{(q-p)^2}{npq}$

Συντελεστής Κυρτότητας: $\beta = 3 + \dfrac{1-6pq}{npq}$

Διωνυμική κατανομή $X \sim B(n,p)$

Παράδειγμα: Ένας παίκτης του μπάσκετ έχει ποσοστό επιτυχίας από τη γραμμή των ελεύθερων βολών 80%.

α. Ποια η πιθανότητα να χάσει από τη γραμμή των ελεύθερων βολών 3 από τις 5 βολές;

β. Ποια η πιθανότητα να πετύχει τουλάχιστον 4 βολές;

Λύση:

p=0,8 q=1-0,8=0,2 n=5 και ζητάμε: α. P(X=2) και β. P(X>=4)

$$\mathbf{P(X=2)=\binom{5}{2}0{,}8^{2}\cdot 0{,}2^{3}=\frac{5!}{2!(5-2)!}0{,}64\cdot 0{,}008=0{,}0512=5{,}12\%}$$

$$P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)=\binom{5}{4}0{,}8^{4}\cdot 0{,}2^{1}+\binom{5}{5}0{,}8^{5}\cdot 0{,}2^{0}=73{,}728\%$$

Διωνυμική κατανομή $X \sim B(n,p)$

Προσαρμογή εμπειρικής σε διωνυμική κατανομή

Ένα προϊόν συσκευάζεται σε κιβώτια των 2 τεμαχίων. Παίρνουμε στην τύχη 400 κιβώτια και ελέγχουμε τον αριθμό των ελαττωματικών σε κάθε κιβώτιο. Τα αποτελέσματα εμφανίζονται στον επόμενο πίνακα.

Αριθμός ελαττωματικών ανά κιβώτιο	Πλήθος Κιβωτίων	$f_i x_i$	Θεωρητικές συχνότητες
0	160	0	132,25
1	140	140	195,50
2	100	200	72,25
Σύνολο	400	340	400,00

$$P(X=0)=\binom{2}{0}0{,}425^{0}\cdot 0{,}575^{2}=0{,}330625$$

$$P(X=1)=\binom{2}{1}0{,}425^{1}\cdot 0{,}575^{1}=0{,}48875$$

$$P(X=2)=\binom{2}{2}0{,}425^{2}\cdot 0{,}575^{0}=0{,}180625$$

$$\overline{X}=\frac{340}{400}=0{,}85 \quad P=\frac{0{,}85}{2}=0{,}425 \quad q=1-p=1-0{,}425=0{,}575$$

Κατανομή Poisson   X~P(λ)

- ✓ Η πιθανότητα του να συμβεί ένα γεγονός είναι ίδια για κάθε δύο διαστήματα ιδίου πλάτους.
- ✓ Η πραγματοποίηση ή η μη πραγματοποίηση ενός γεγονότος σε ένα διάστημα είναι ανεξάρτητη από την πραγματοποίηση ή τη μη πραγματοποίηση σε κάθε άλλο διάστημα.

Συνάρτηση Πιθανότητας $$P(X = x) = \lambda^x \cdot \frac{e^{-\lambda}}{x!}$$

Κατανομή Poisson $X \sim P(\lambda)$

Συνάρτηση Πιθανότητας

$$P(X = x) = \lambda^{x} \cdot \frac{e^{-\lambda}}{x!}$$

Παράμετροι κατανομής Poisson:

Μέση Τιμή: $E(x) = \lambda = np$

Τυπική απόκλιση: $\sigma = \sqrt{\lambda}$

Διακύμανση: $Var(X)=\sigma^2=\lambda$

Συντελεστής Ασυμμετρίας: $S_k = \frac{1}{\lambda}$

Συντελεστής Κυρτότητας: $\beta = 3 + \frac{1}{\lambda}$

Κατανομή Poisson $X \sim P(\lambda)$

Παράδειγμα:

Ταξιδιώτες φθάνουν τυχαία και ανεξάρτητα στο σταθμό ελέγχου αποβιβάσεων ενός αεροδρομίου. Ο μέσος αριθμός αφίξεων είναι 10 ταξιδιώτες ανά λεπτό.

1. Ποια η πιθανότητα στη διάρκεια ενός λεπτού να μη φθάσει κανείς ταξιδιώτης;
2. Ποια η πιθανότητα να φθάσουν το πολύ 3 ταξιδιώτες στη διάρκεια ενός λεπτού;
3. Ποια η πιθανότητα στη διάρκεια 15 δευτερολέπτων να μη φθάσει κανείς ταξιδιώτης;
4. Ποια η πιθανότητα στη διάρκεια 15 δευτερολέπτων να φθάσει τουλάχιστον 1 ταξιδιώτης;

Κατανομή Poisson X~P(λ)

1. Ζητάμε την πιθανότητα P(x=0). Με λ=10 θα έχουμε:

$$P(X=0) = 10^0 \frac{e^{-10}}{0!} = 0,000045399 = 0,00454\%$$

2. Ζητάμε την πιθανότητα P(X≤3).

$$P(X \le 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) =$$

$$= 10^0 \frac{e^{-10}}{0!} + 10^1 \frac{e^{-10}}{1!} + 10^2 \frac{e^{-10}}{2!} + 10^3 \frac{e^{-10}}{3!} =$$

=0,0000454+0,000454+0,00227+0,00757=

=0,0103394=1,03394%.

Κατανομή Poisson X~P(λ)

3. Με λ=2,5 πλέον θέλουμε την πιθανότητα: P(X=0).

$$P(X=0)=2{,}5^{0}\,\frac{e^{-2,5}}{0!}=0{,}0821$$ ή 8,21%.

4. Ζητάμε την πιθανότητα P(X≥1) με λ=2,5

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\ 2{,}5^{0}\,\frac{e^{-2,5}}{0!}=1-0{,}0821=0{,}9179$$

ή 91,79%.

Κανονική Κατανομή $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

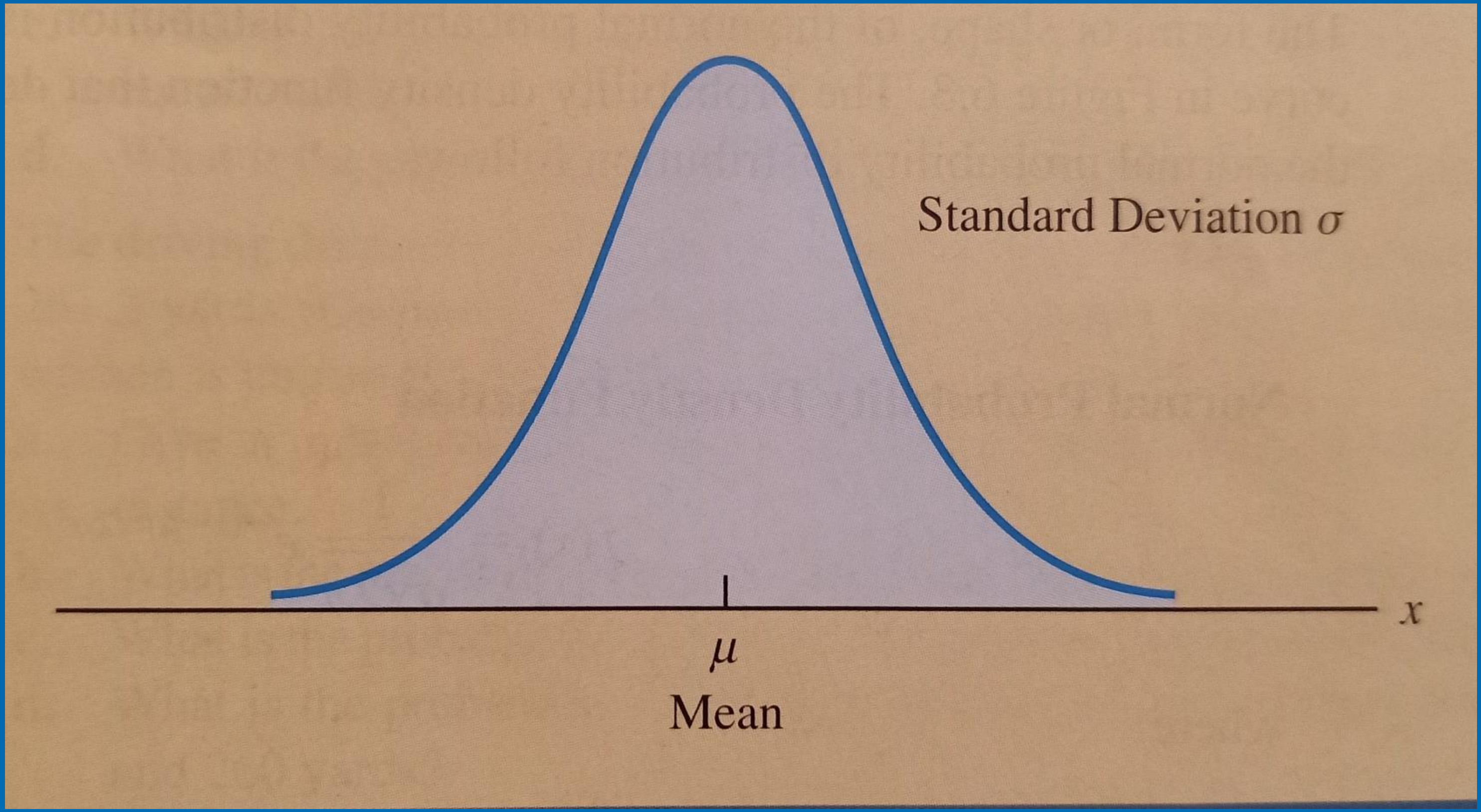
Χαρακτηριστικά της Κανονικής κατανομής:

✓Υπάρχει μία οικογένεια κανονικών κατανομών που όμως η κάθε μία από αυτές διαφοροποιείται από τον αριθμητικό της μέσο μ και την τυπική της απόκλιση σ.

✓Το υψηλότερο σημείο της κανονικής κατανομής είναι ο αριθμητικός μέσος αυτής που είναι επίσης και διάμεσος και σημείο μέγιστης συχνότητας της κατανομής. Δηλαδή ισχύει η σχέση: $\mathbf{\mu = M_{1/2} = M_0}$.

✓ Ο αριθμητικός μέσος της κατανομής μπορεί να πάρει κάθε αριθμητική τιμή: θετική, αρνητική ή μηδέν.

✓ Η καμπύλη της κανονικής κατανομής είναι μονόκορφη σε μορφή καμπάνας, και συμμετρική με άξονα συμμετρίας την ευθεία του αριθμητικού μέσου.

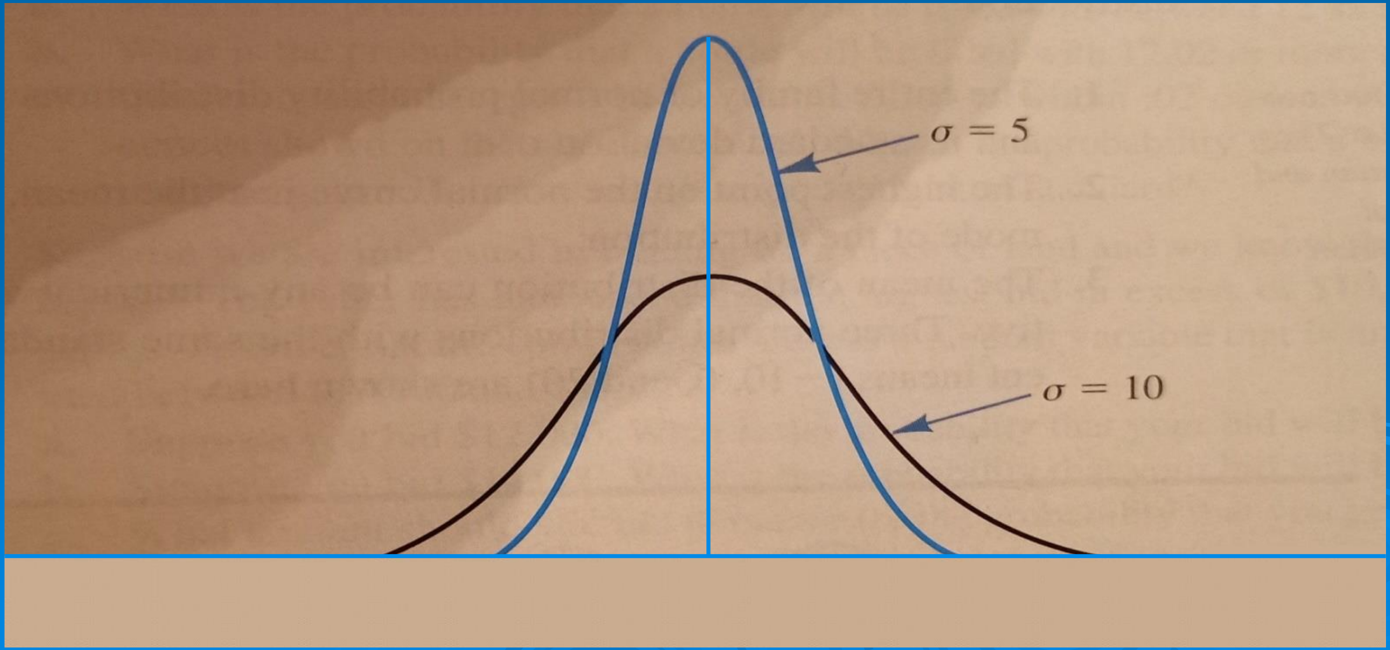

Standard Deviation σ
x
μ
Mean

Κανονική Κατανομή $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

Χαρακτηριστικά της Κανονικής κατανομής:

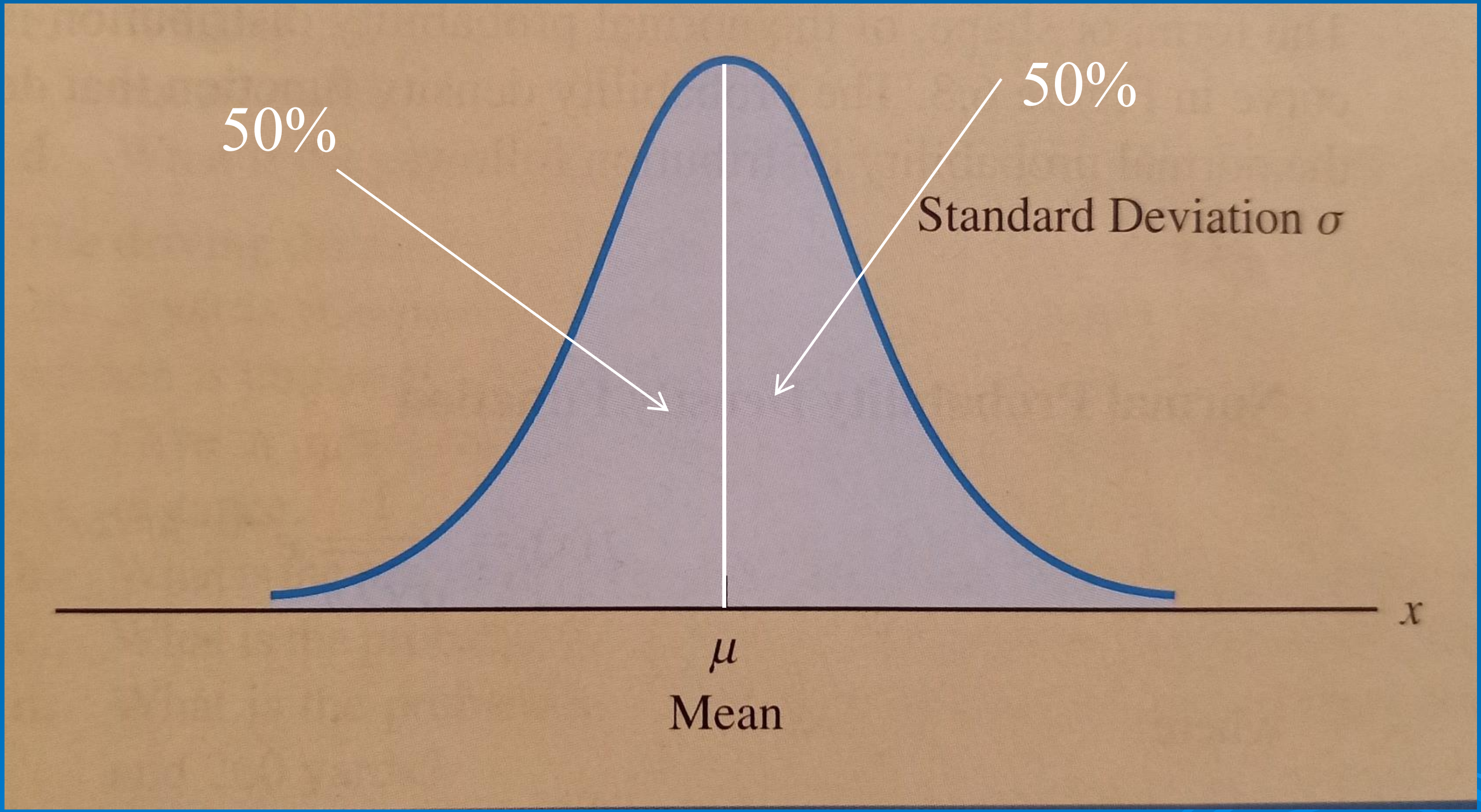
✓Η καμπύλη είναι ασυμπτωτική (πλησιάζει τον άξονα χχ΄ αλλά δεν τον ακουμπάει παρά μόνο θεωρητικά στο ±).

✓Η τυπική απόκλιση καθορίζει το πλάτος της καμπύλης. Μεγάλη τυπική απόκλιση δημιουργεί καμπύλη πλατιά δείχνοντας και την διασπορά των τιμών.



Κανονική Κατανομή $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

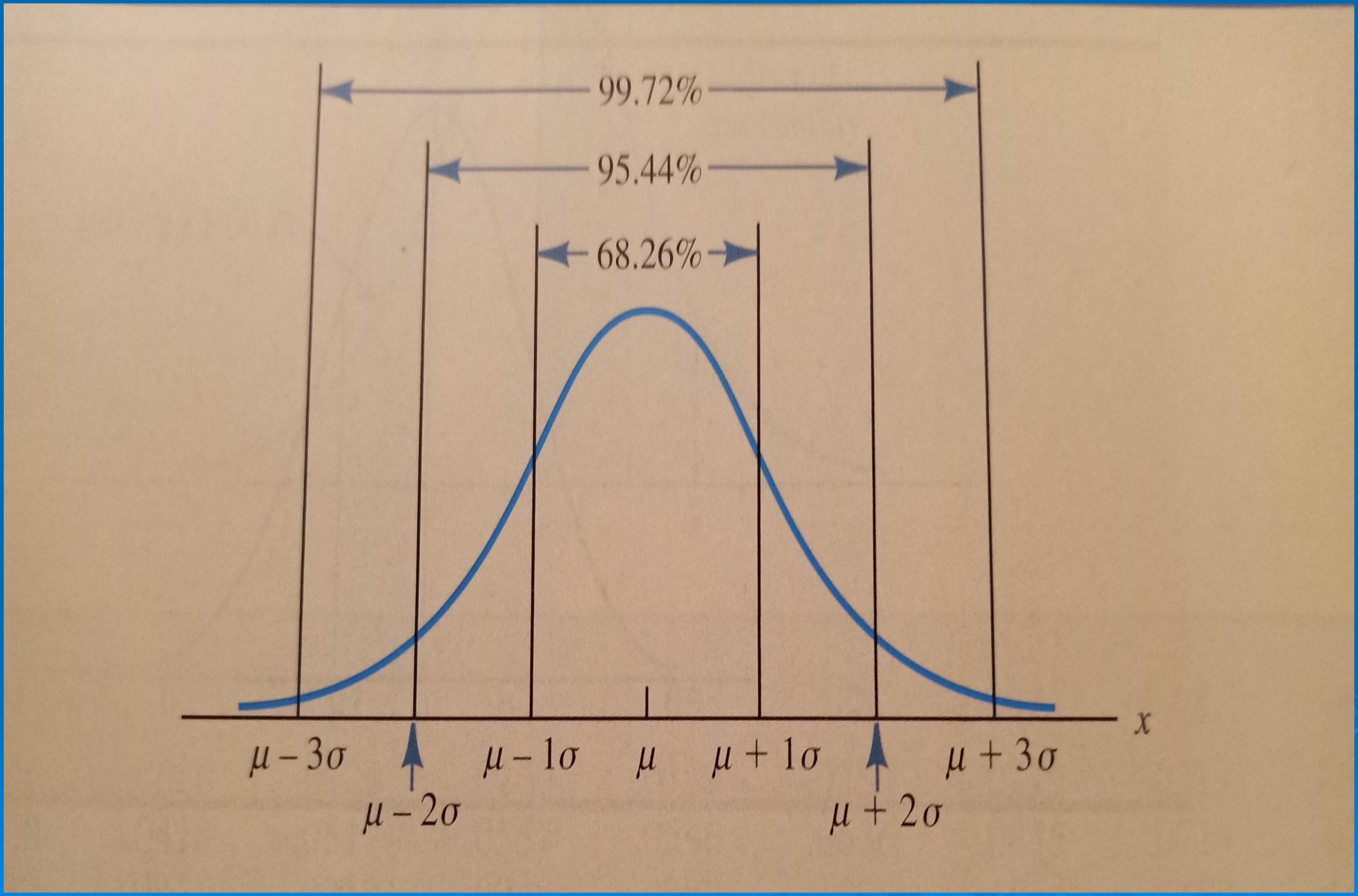
✓Το συνολικό εμβαδόν της περιοχής κάτω από την καμπύλη της κανονικής κατανομής είναι 1 και κατανέμεται ισομερώς αριστερά και δεξιά του αριθμητικού μέσου (0,5 αριστερά και 0,5 δεξιά του τού μέσου).



✓ Οι πιθανότητες για την κανονική τυχαία μεταβλητή δίνονται από το εμβαδόν της περιοχής κάτω από την καμπύλη

Χαρακτηριστικά της Κανονικής κατανομής:

- Το 68,26% του συνολικού εμβαδού βρίσκεται σε απόσταση $\pm\, \sigma$ από τον αριθμητικό μέσο.
- Το 95,44% του συνολικού εμβαδού βρίσκεται σε απόσταση $\pm\, 2\sigma$ από τον αριθμητικό μέσο.
- Το 99,72% του συνολικού εμβαδού βρίσκεται σε απόσταση $\pm\, 3\sigma$ από τον αριθμητικό μέσο.
- Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$ με $\pi = 3,14159$ και $e = 2,71828$.


99.72%
95.44%
68.26%
x
μ – 3σ
μ – 1σ
μ
μ + 1σ
μ + 3σ
μ – 2σ
μ + 2σ

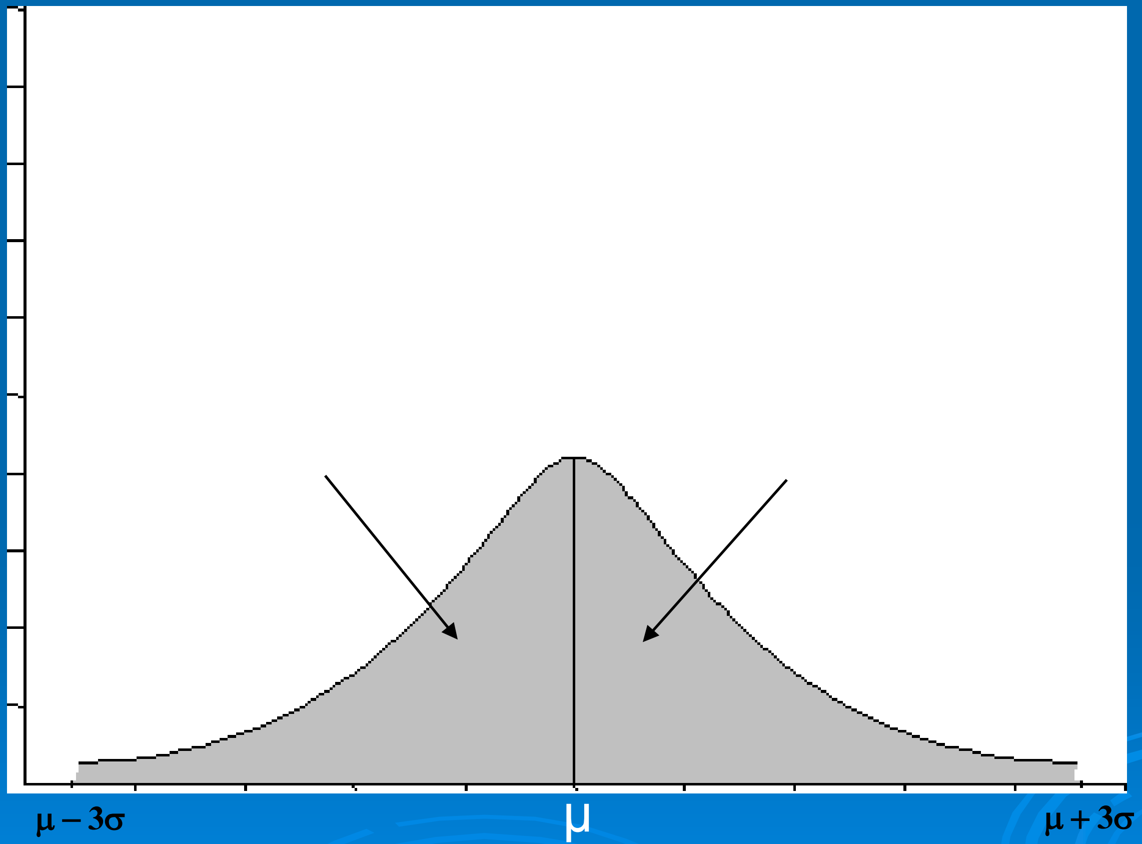
Εφαρμογές στη Διοίκηση Επιχειρήσεων

Η Κανονική κατανομή έχει εφαρμογές σε πολλές περιοχές της Διοίκησης Επιχειρήσεων. Για παράδειγμα:

1. Η σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου υποθέτει συνήθως ότι οι αποδόσεις ενός χαρτοφυλακίου περιουσιακών στοιχείων ακολουθούν κανονική κατανομή.
2. Στις επιχειρήσεις διαχείρισης, παραλλαγές της διαδικασίας συχνά κατανέμονται κανονικά.
3. Στην διαχείριση ανθρώπινων πόρων, η απόδοση των εργαζομένων κάποιες φορές θεωρείται ότι είναι κανονικά κατανεμημένη.

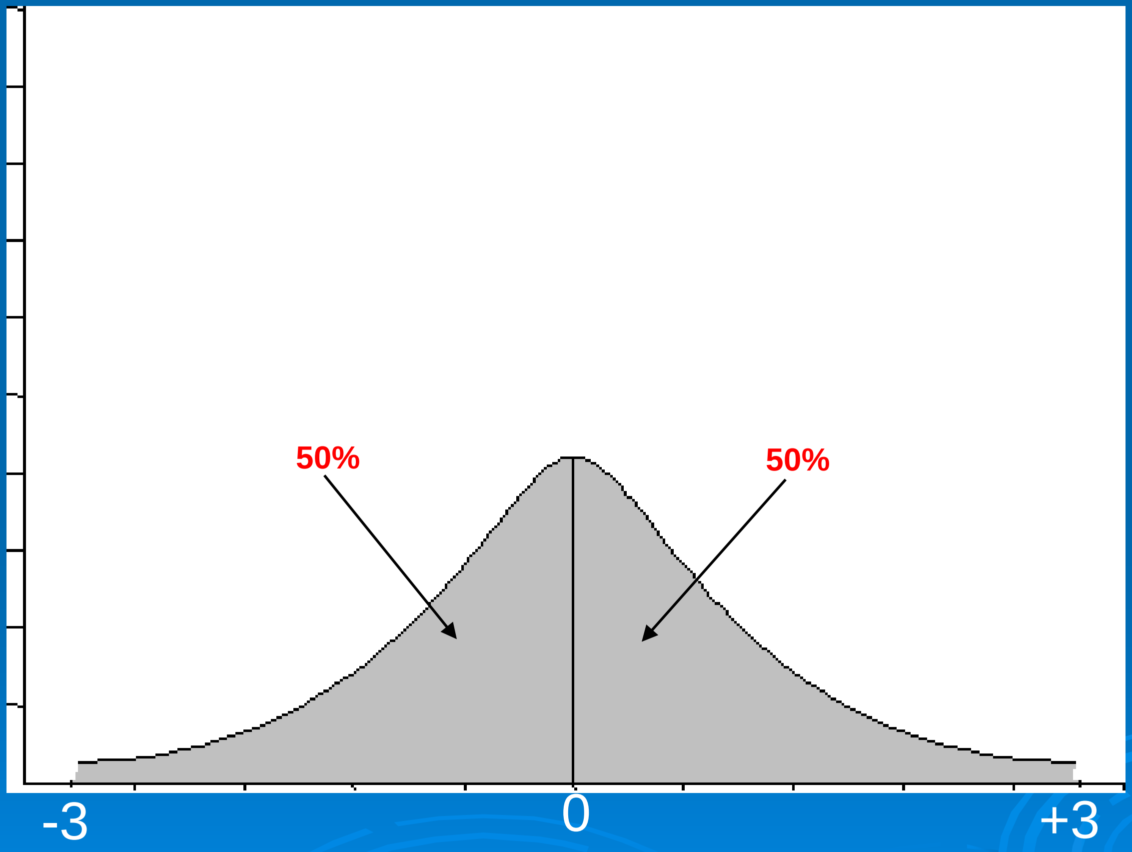
Η κανονική κατανομή χρησιμοποιείται συνήθως για να περιγράψει τυχαίες μεταβλητές, ειδικά αυτές που έχουν συμμετρική, μονότροπη κατανομή. Σε πολλές περιπτώσεις, ωστόσο, η κανονική κατανομή είναι μόνο μια πρόχειρη προσέγγιση της πραγματικής κατανομής. Για παράδειγμα, το φυσικό μήκος ενός συστατικού δεν μπορεί να είναι αρνητικό, αλλά η κανονική κατανομή εκτείνεται απεριόριστα τόσο σε θετικές όσο και σε αρνητικές κατευθύνσεις. Παρ’ όλα αυτά, τα προκύπτοντα σφάλματα μπορεί να είναι αμελητέα ή εντός αποδεκτών ορίων, επιτρέποντας την επίλυση των προβλημάτων με επαρκή ακρίβεια υποθέτοντας μία κανονική κατανομή.

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx$$



Η τυπική μεταβλητή

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



Παράδειγμα 1ο :
Έρευνα σε 10.000 παιδιά έδειξε ότι καταναλώνουν κατά μέσο όρο 1500 ώρες ετησίως στην τηλεόραση. Αν η τυπική απόκλιση είναι 100 ώρες, να υπολογισθεί:

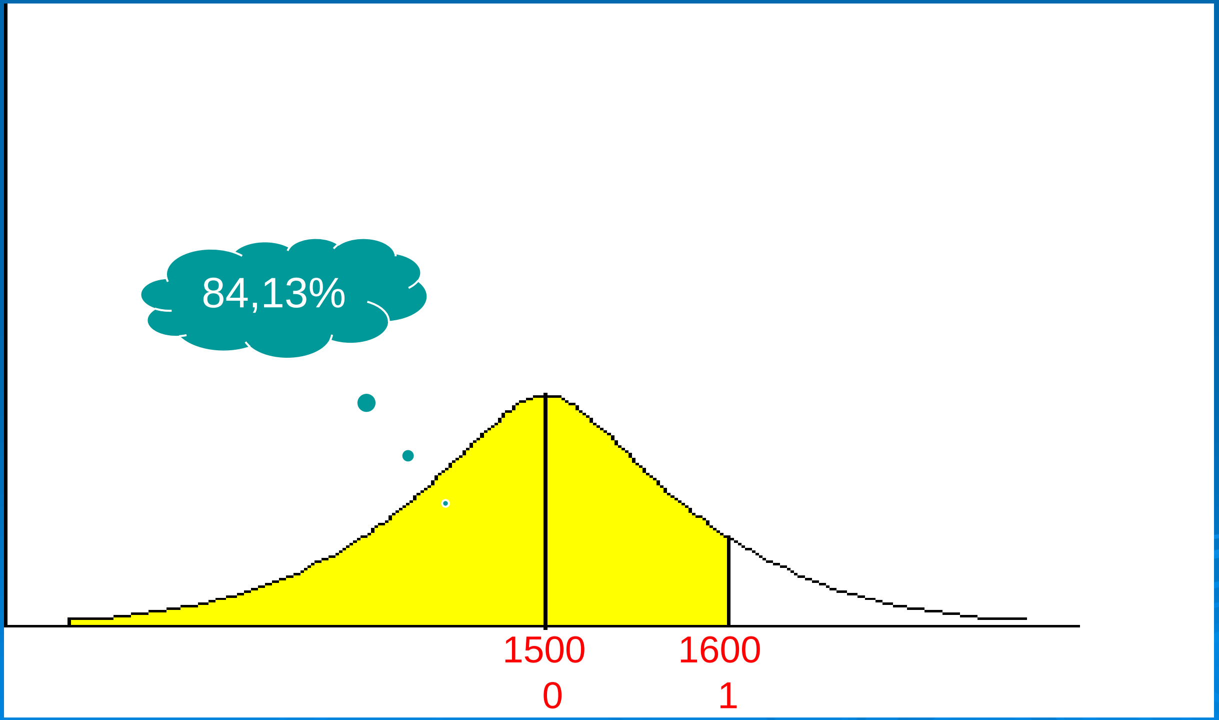
1. Ο αριθμός των παιδιών που παρακολουθεί το πολύ 1600 ώρες ετησίως.
2. Ο αριθμός των παιδιών που παρακολουθεί περισσότερες από 1750 ώρες ετησίως.
3. Ο αριθμός των παιδιών που παρακολουθεί το πολύ 1450 ώρες ετησίως.
4. Ο αριθμός των παιδιών που παρακολουθεί τουλάχιστον 1400 ώρες ετησίως.
5. Ο αριθμός των παιδιών που παρακολουθεί από 1450 έως 1650 ώρες ετησίως.
6. Ο αριθμός των παιδιών που παρακολουθεί από 1650 έως 1700 ώρες ετησίως.
7. Ο αριθμός των παιδιών που παρακολουθεί από 1350 έως 1400 ώρες ετησίως.

1.

$$P(X \le 1600) \qquad Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{1600-1500}{100} = 1$$

$$P(X \le 1600) = P(Z \le 1) = \Phi(1) = 0{,}5 + 0{,}3413 = 0{,}8413$$

0,8413*10000=8.413

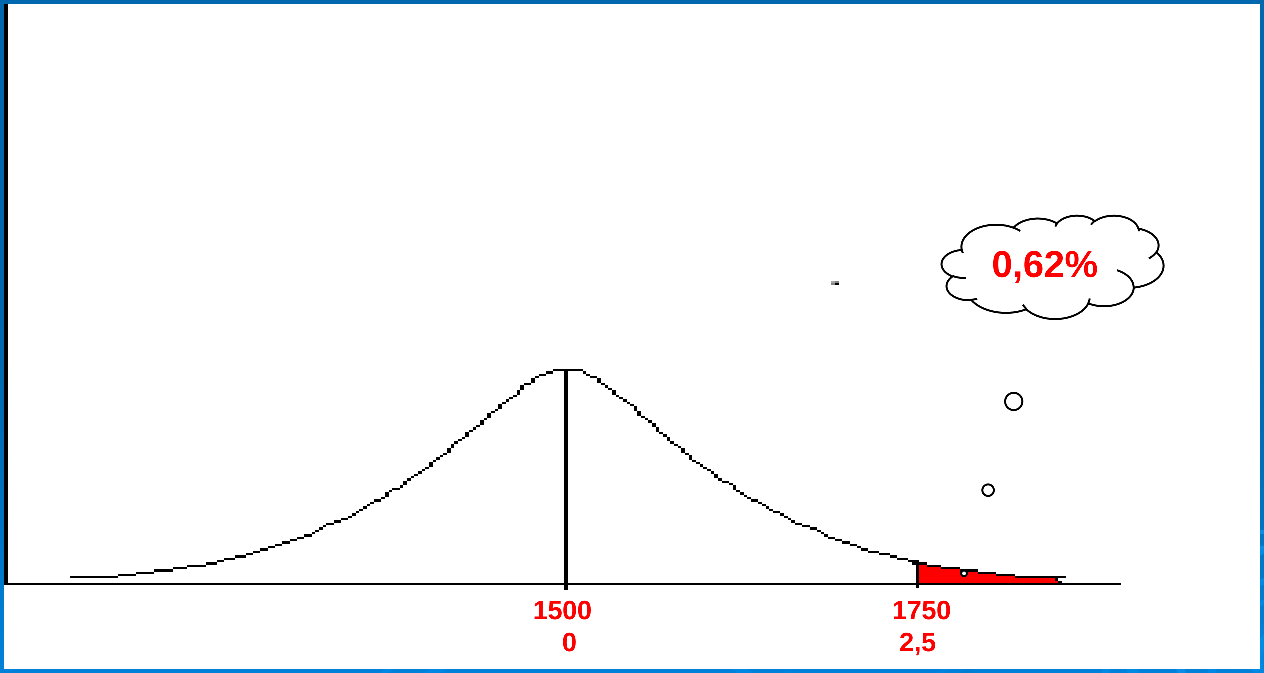


2.

$$P(X \succ 1750) = 1 - P(X \le 1750) \qquad Z = \frac{1750 - 1500}{100} = 2{,}5$$

$$P(X \succ 1750) = 1 - P(X \le 1750) = 1 - P(Z \le 2{,}5) = 1 - \Phi(2{,}5) = 1 - (0{,}5 + 0{,}4938) = 0{,}0062$$

0,0062*10000=62

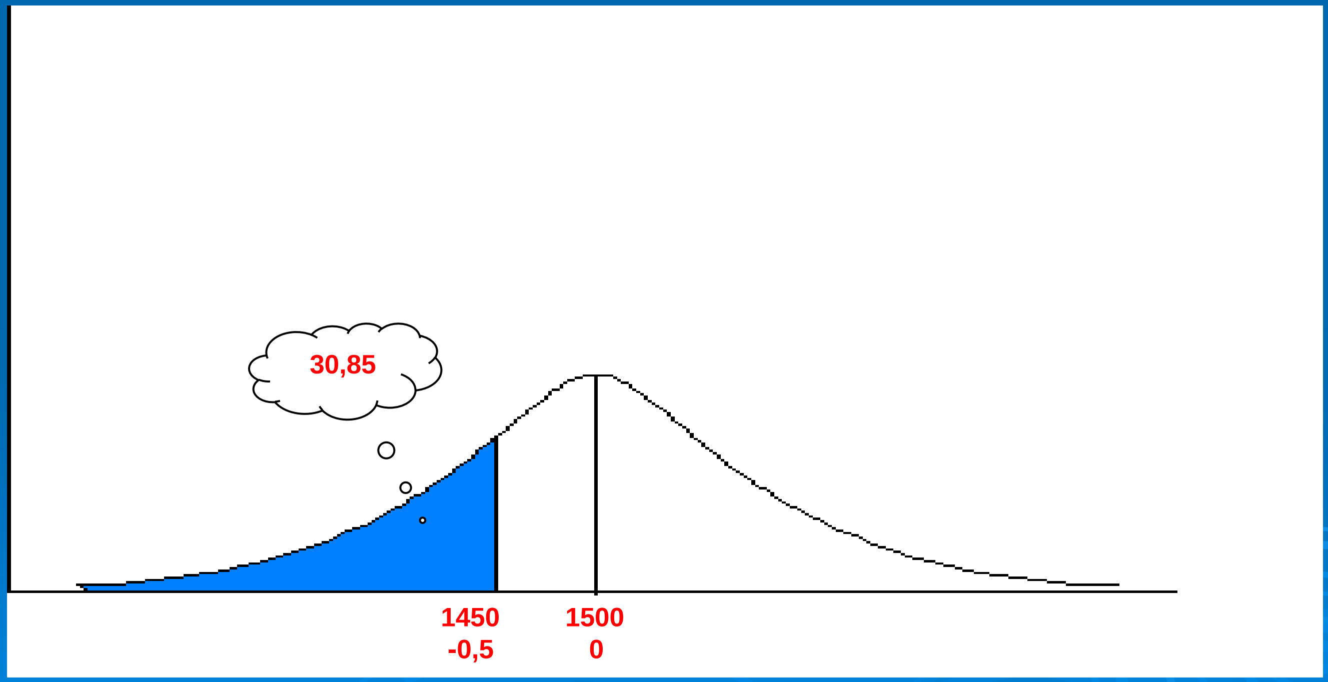


3. $P(\leq 1450)$ $Z = \dfrac{1450 - 1500}{100} = -0{,}5$

$$P(X \leq 1450) = P(Z \leq -0{,}5) = \Phi(-0{,}5)$$

$\Phi(-0{,}5)=1-\Phi(0{,}5)=1-(0{,}5+0{,}1915)=0{,}3085=30{,}85\%$

$0{,}3085*10000=3085$

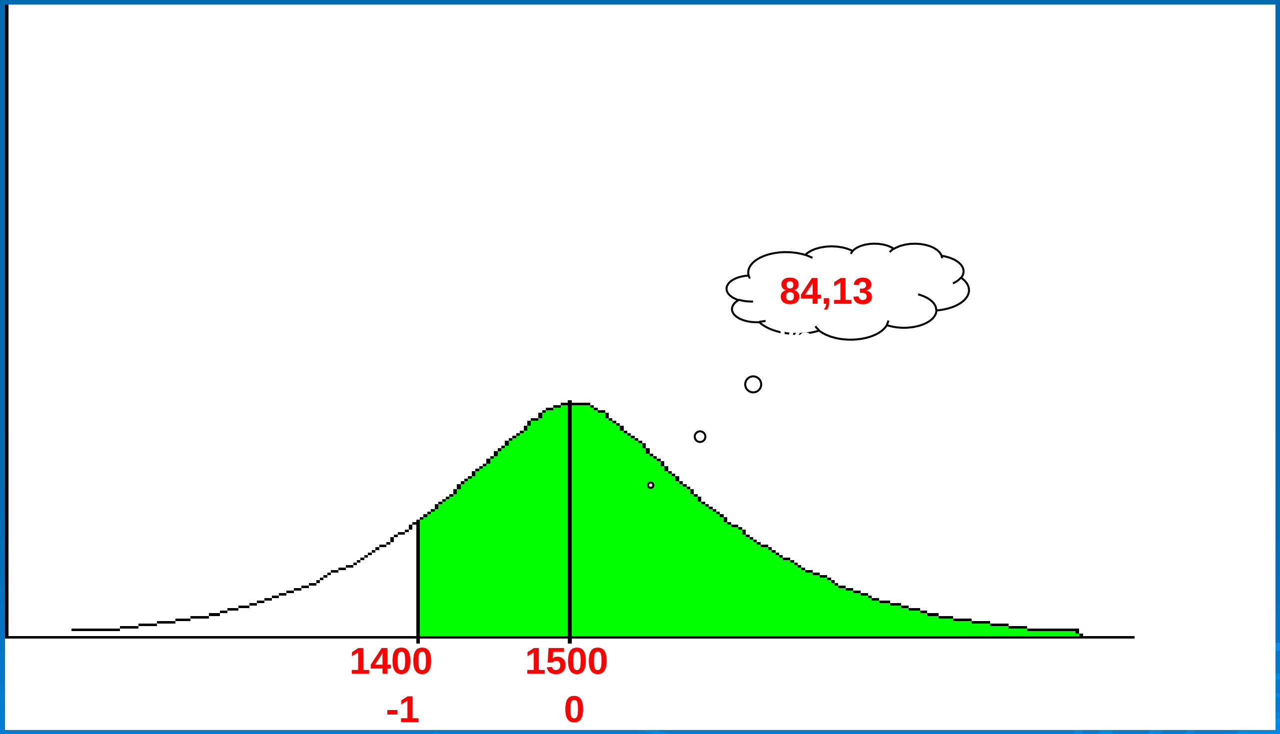


4. $P(X \geq 1400) = 1 - P(X \prec 1400).$ $Z = \dfrac{1400 - 1500}{100} = -1$

$P(X \geq 1400) = 1 - P(X \prec 1400) =$

$=1-P(Z<-1)=1-\Phi(-1)=1-[1-\Phi(1)]=\Phi(1)=0,5+0,3413=0,8413=84,13\%.$

0,8413*10000=8413 παιδιά



5.
$$P(1450 \le X \le 1650) = P(X_1 \le 1650) - P(X_2 \le 1450)$$

$$Z_1 = \frac{1650-1500}{100} = 1{,}5 \qquad Z_2 = \frac{1450-1500}{100} = -0{,}5$$

$$P(X_1 \le 1650) - P(X_2 \le 1450) = P(Z_1 \le 1{,}5) - P(Z_2 \le -0{,}5) = \Phi(1{,}5) - \Phi(-0{,}5) =$$
$$= \Phi(1{,}5) - [1 - \Phi(0{,}5)] = (0{,}4332 + 0{,}5) - 1 + (0{,}1915 + 0{,}5) = 0{,}9332 - 1 + 0{,}6915 =$$
$$= 0{,}6247 \qquad 0{,}6246 * 10.000 = 6.247 \text{ Παιδιά}$$

6.
$$P(1650 \le X \le 1700) = P(X_1 \le 1700) - P(X_2 \le 1650)$$

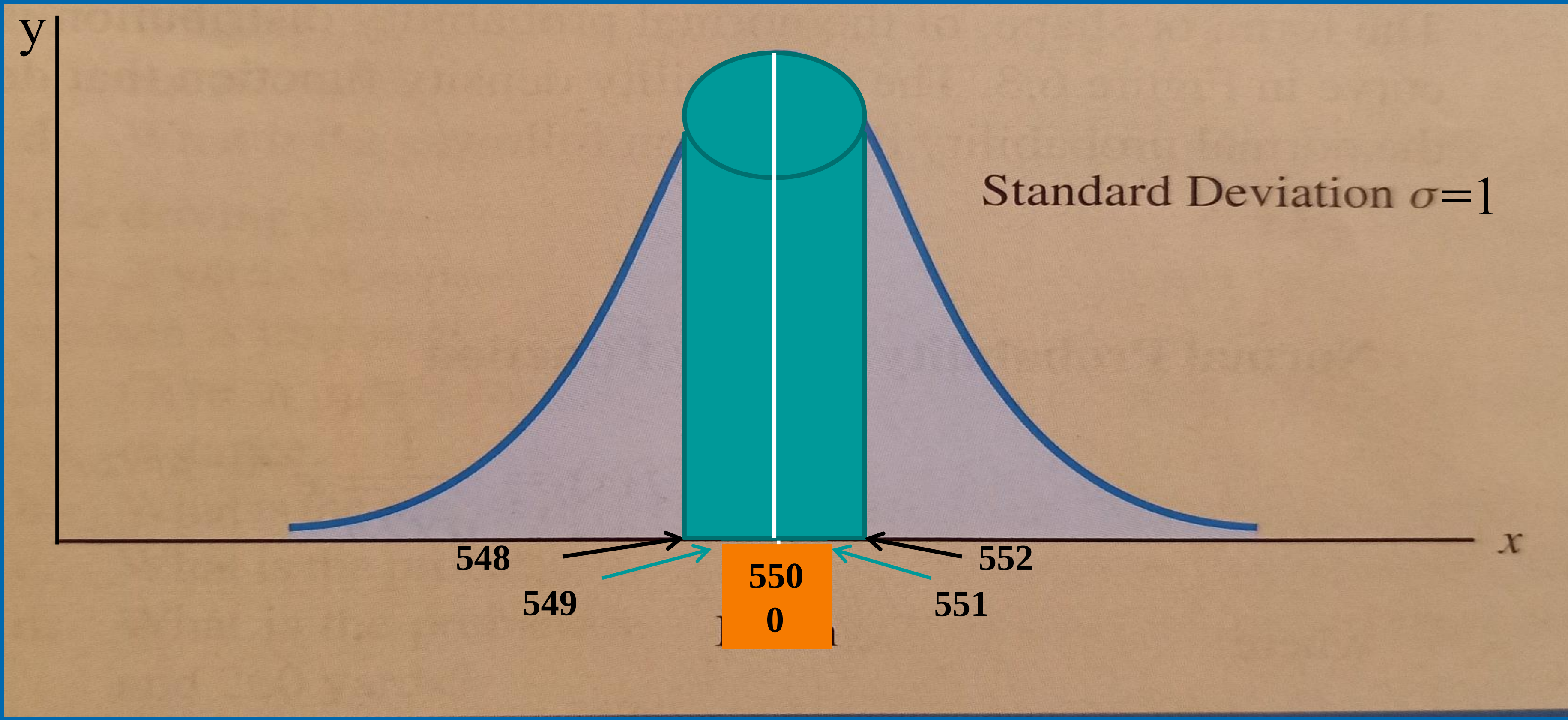
$$Z_1 = \frac{1700-1500}{100} = 2 \qquad Z_2 = \frac{1650-1500}{100} = 1{,}5$$

$$P(Z_1 \le 2) - P(Z_2 \le 1{,}5) = \Phi(2) - \Phi(1{,}5) = (0{,}4772 + 0{,}5) - (0{,}4332 + 0{,}5) = 0{,}044$$
$$0{,}044 * 10.000 = 440 \text{ Παιδιά}$$

7.
$$P(1350 \le X \le 1400) = P(X_1 \le 1400) - P(X_2 \le 1350)$$

$$Z_1 = \frac{1400-1500}{100} = -1 \qquad Z_2 = \frac{1350-1500}{100} = -1{,}5$$

$$P(Z_1 \le -1) - P(Z_2 \le -1{,}5) = \Phi(-1) - \Phi(-1{,}5) = 1 - \Phi(1) - [1 - \Phi(1{,}5)] =$$
$$= \Phi(1{,}5) - \Phi(1) = 0{,}4332 - 0{,}3413 = 0{,}0919 \qquad 0{,}0919 * 10.000 = 919 \text{ Παιδιά}$$


y
Standard Deviation σ=1
x
548
549
550
0
551
552