Hellenic Republic
INTERNATIONAL HELLENIC UNIVERSITY
University Center for International Programmes of Studies

Τμήμα Διοικητικής Επιστήμης και Τεχνολογίας
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών:
Διοίκηση Επιχειρήσεων και Οργανισμών για Στελέχη

mba executive

Ποσοτικές Μέθοδοι για Στελέχη Επιχειρήσεων
Quantitative Methods for Managers
Criteria- Linear Programming

by
Prof. Efstathios Dimitriadis
Ph.D in Applied Statistics
M.Sc in Quality Assurance
Mathematic, stream of Statistics and Demography

Κριτήρια λήψης Αποφάσεων

1. Κριτήριο μεγιστοποίησης των ελάχιστων απολαβών Wald (Ελαχιστοποίηση της ζημίας) maxi min -Απαισιοδοξίας και Συντηρητισμού

$K_j = \min a_{ij} \quad i=1,2,3,\ldots,m$

$\max(K_1, K_2,\ldots,K_n)$

2. Κριτήριο μεγιστοποίησης των μέγιστων απολαβών (Μεγιστοποίηση κέρδους) maxi max- Υπεραισιόδοξο κριτήριο

$K_j = \max a_{ij} \quad i=1,2,3,\ldots,m$

$\max(K_1, K_2,\ldots,K_n)$

3. Κριτήριο ελαχιστοποίησης των μέγιστων χαμένων ευκαιριών

(mini max χαμένων ευκαιριών- κριτήριο λύπης)

χ_{ij} =(max a_{ij})- a_{ij} j=1,2,3,….,n min(χ_1,χ_2,….,χ_n)

4. Κριτήριο μεγιστοποίησης των αναμενόμενων απολαβών

(max αναμενόμενων απολαβών- Laplace)

$$a_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} P_i$$ (Συνθήκες κινδύνου) i= 1,2,3….,m

$$a_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$ (Συνθήκες αβεβαιότητας) max(a_1, a_2,….,a_n)

5. Κριτήριο ελαχιστοποίησης των αναμενόμενων χαμένων ευκαιριών (min αναμενόμενων χαμένων ευκαιριών)

Εφαρμόζεται μόνο κάτω από συνθήκες κινδύνου

$$x_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i$$

j=1,2,3,….,n **min(χ_1,χ_2,….,χ_n)**

!!!! Τα κριτήρια 4 και 5 οδηγούν πάντοτε στην ίδια απόφαση

Αναμενόμενη Αξία της Πλήρους Πληροφόρησης

(Expected Value of Perfect Information- EVPI)

- Συχνά υπάρχουν διαθέσιμες πληροφορίες που μπορούν να βελτιώσουν τις πιθανότητες εκτίμησης των διαφορετικών καταστάσεων.
- Η αναμενόμενη τιμή της τέλειας πληροφορίας **(EVPI)** είναι η αύξηση του αναμενόμενου κέρδους που θα είχε ως αποτέλεσμα, αν ήξερε με βεβαιότητα ποια κατάσταση θα συνέβαινε.
- Η **EVPI** είναι η τιμή που θα ήταν διατεθειμένος να πληρώσει κάποιος προκειμένου να αποκτήσει πρόσβαση σε τέλειες πληροφορίες.
- Η **EVPI** παρέχει ένα ανώτερο όριο στην αναμενόμενη αξία οποιουδήποτε δείγματος ή πληροφοριών έρευνας.

6. Κριτήριο Αισιοδοξίας- Απαισιοδοξίας (Hurwicz)

Δείκτης Αισιοδοξίας $(0 \le \lambda_j \le 1)$

Δείκτης Απαισιοδοξίας $1-\lambda_j$

$$x_j = \max a_{ij} \qquad \psi_j = \min a_{ij} \qquad S_j = \lambda_j x_j + (1-\lambda_j)\psi_j$$

$$\max(S_1, S_2, \ldots\ldots, S_n)$$

!!!!! Οι δείκτες αισιοδοξίας- απαισιοδοξίας, για κάθε απόφαση (εναλλακτική λύση) , μπορεί να διαφέρουν

Παράδειγμα 1ο: Η διεύθυνση ενός γαλακτοκομικού συνεταιρισμού αντιμετωπίζει πρόβλημα επιλογής ανάμεσα σε 4 προσφορές (Α1, Α2, Α3, Α4) για την παραγωγή και διάθεση στην αγορά ενός δοχείου με γιαούρτι προς 2€ το δοχείο.

Προσφορές

Προσφορά	Προκαταβολή	Δαπάνες ανά δοχείο
Α1	600	0,5
Α2	900	0,4
Α3	1700	0,3
Α4	3400	0,2

Ζήτηση

Ε1	Μικρή	500 δοχεία
Ε2	Μέτρια	2.000 δοχεία
Ε3	Μεγάλη	3.000 δοχεία

Ποια προσφορά πρέπει να επιλέξει ο συνεταιρισμός με βάση τα κριτήρια:

1. Maxi min και maxi max των απολαβών
2. Mini max χαμένων ευκαιριών
3. Laplace

Απολαβές: Α= Έσοδα- Προκαταβολή- Τρέχουσες Δαπάνες

E1A1: 500*2-600-500*0,5=150
E1A2: 500*2-900-500*0,4=-100
E1A3: 500*2-1700-500*0,3=-850
E1A4: 500*2-3400-500*0,2=-2500
E2A1: 2000*2-600-2000*0,5=2400
E2A2: 2000*2-900-2000*0,4=2300
E2A3: 2000*2-1700-2000*0,3=1700
E2A4: 2000*2-3400-2000*0,2=200
E3A1: 3000*2-600-3000*0,5=3900
E3A2: 3000*2-900-3000*0,4=3950
E3A3: 3000*2-1700-3000*0,3=3400
E3A4: 3000*2-3400-3000*0,2=2000

Πίνακας απολαβών

$$\begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 150 & -100 & -850 & -2500 \\ 2400 & 2300 & 1700 & 200 \\ 3900 & 3950 & 3400 & 2000 \end{bmatrix} \end{array}$$

Περιορισμένος Πίνακας απολαβών

$$\begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A_1 & A_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 150 & -100 \\ 2400 & 2300 \\ 3900 & 3950 \end{bmatrix} \end{array}$$

1. Maxi min: K_1=150 K_2=-100 max(150, -100)= 150 **A1**
2. Maxi max: K_1=3900 K_2=3950 max(3900, 3950)= 3950 **A2**

2. Mini max χαμένων ευκαιριών

Πίνακας χαμένων ευκαιριών

$$\begin{array}{c|cc} & A_1 & A_2 \\ \hline \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 150-150=0 & 150-(-100)=250 \\ 2400-2400=0 & 2400-2300=100 \\ 3950-3900=50 & 3950-3950=0 \end{bmatrix}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} & A_1 & A_2 \\ \hline \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 0 & 250 \\ 0 & 100 \\ 50 & 0 \end{bmatrix}} \end{array}$$

Min(50, 250)=50 **A1**

3. max αναμενόμενων απολαβών-Laplace

$$\begin{array}{c|cc} & A_1 & A_2 \\ \hline \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 150 & -100 \\ 2400 & 2300 \\ 3900 & 3950 \end{bmatrix}} \end{array}$$

$a_{1=}$ 1/3(150+2400+3900)=2150

$a_{2=}$ 1/3(-100+2300+3950)=2050

Max(2150, 2050)= 2150 **A1**

Παράδειγμα 2ο: Το **Δ.Σ** μιας βιομηχανίας πρέπει να επιλέξει ανάμεσα σε 3 εναλλακτικές μεθόδους παραγωγής **Α1, Α2, Α3** προϊόντος **Π** προς 100€ η μονάδα. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται αναλυτικά το τι έξοδα απαιτεί η κάθε μια από τις μεθόδους.

Μέθοδος Παραγωγής	Αρχικά έξοδα	Τρέχουσες δαπάνες ανά μονάδα
Α1	1.000.000	50
Α2	1.600.000	40
Α3	3.000.000	30
Η έρευνα αγοράς έδειξε ότι θα συμβεί ένα από τα εξής γεγονότα:		
Γεγονός	**Ζήτηση**	**Πιθανότητα**
Ε1	Μικρή ζήτηση (25.000 μονάδες)	10%
Ε2	Μέτρια ζήτηση (100.000 μονάδες)	70%
Ε3	Μεγάλη ζήτηση (150.000 μονάδες)	20%

Ποια μέθοδο πρέπει να επιλέξει το **Δ.Σ** της βιομηχανίας με βάση τα κριτήρια:

Maxi min απολαβών

Mini max χαμένων ευκαιριών

Max αναμενόμενων απολαβών ή **min** αναμενόμενων χαμένων ευκαιριών

Απολαβές: Α= Έσοδα- Προκαταβολή- Τρέχουσες Δαπάνες

E1A1: 25.000*100 -1.000.000 - 25.000*50 = 250.000

E1A2: 25.000*100- 1.600.000 - 25.000*40 = -100.000

E1A3: 25.000*100- 3.000.000 - 25.000*30 = -1.250.000

E2A1: 100.000*100-1.000.000-100.000*50= 4.000.000

E2A2: 100.000*100-1.600.000-100.000*40= 4.400.000

E2A3: 100.000*100-3.000.000-100.000*30= 4.000.000

E3A1: 150.000*100-1.000.000-150.000*50= 6.500.000

E3A2: 150.000*100-1.600.000-150.000*40= 7.400.000

E3A3: 150.000*100-3.000.000-150.000*30= 7.500.000

Πίνακας απολαβών

$$\begin{array}{c|ccc} & A1 & A2 & A3 \\ \hline E_1 & & & \\ E_2 & \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} 250 & -100 & -1250 \\ 4000 & 4400 & 4000 \\ 6500 & 7400 & 7500 \end{bmatrix}} \\ E_3 & & & \end{array}$$

1. Maxi min:
   K_1=250 K_2=-100 K_3=-1250 max(250, -100, -1250)= 250 **A1**

2. Maxi max:
   K_1=6500 K_2=7400 K_3 =7500 max(6500, 7400, 7500)= 7500 **A3**

2. mini max χαμένων ευκαιριών

Πίνακας χαμένων ευκαιριών

$$\begin{bmatrix} 250-250=0 & 250-(-100)=350 \\ 4400-4000=400 & 4400-4400=0 \\ 7400-6500=900 & 7400-7400=0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A_1 & A_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 350 \\ 400 & 0 \\ 900 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

min(900, 350)=350 **A2**

3. max αναμενόμενων απολαβών-Laplace ή min αναμενόμενων χαμένων ευκαιριών

$a_{1=}$ (0*0,1+400*0,7+900*0,2)=460

$a_{2=}$ (350*0,1+0*0,7+0*0,2)=35

min(460, 35)= 35 **A2**

Παράδειγμα 3ο :

Μια επιχείρηση παραγγέλνει κάθε εβδομάδα ένα προϊόν προς αποθήκευση και πώληση. Κάθε μονάδα προϊόντος έχει κόστος 100€, πωλείται προς 300€ και έχει διάρκεια ζωής μίας εβδομάδας. Δηλαδή στο τέλος της εβδομάδας το προϊόν δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί και καταστρέφεται. Η επιχείρηση αντιμετωπίζει το πρόβλημα της λήψης απόφασης για το ύψος της εβδομαδιαίας παραγγελίας καθώς η ζήτηση του προϊόντος κυμαίνεται από 0 μονάδες έως 3 μονάδες εβδομαδιαίως με αντίστοιχες πιθανότητες που φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Χρησιμοποιήστε το κατάλληλο κριτήριο για να λάβετε την βέλτιστη απόφαση.

Ζήτηση (σε μονάδες)	Πιθανότητα ζήτησης
0	10%
1	30%
2	40%
3	20%

Απολαβές= Τιμή πώλησης*Ύψος πωλήσεων -Τιμή κόστους*Ύψος παραγγελίας

Πίνακας απολαβών

			Προσφορά				
			0	1	2	3	Άριστη
Ζήτηση	0	0,1	0	-100	-200	-300	-100
	1	0,3	0	200	100	0	200
	2	0,4	0	200	400	300	400
	3	0,2	0	200	400	600	600
	EV		0	170	**250**	210	**330**

Οι αναμενόμενες απολαβές για κάθε απόφαση είναι:
EV(0)=0, EV(1)=170, EV(2)=250 και EV(3)=210
Συνεπώς, σύμφωνα με το κριτήριο max αναμενόμενων απολαβών η απόφαση είναι: **Προμήθεια δύο προϊόντων την εβδομάδα**

Να υπολογιστεί η **Αναμενόμενη Αξία της Πλήρους Πληροφόρησης (EVPI)**

EVPI=330-250=80

Παράδειγμα 4ο :

Σεφ διοικεί μια κουζίνα που παρέχει φαγητό σε διάφορες καντίνες. Μια ιδιαίτερη σαλάτα πωλείται στην καντίνα για 10€ και κοστίζει 8€ για την προετοιμασία. Ως εκ τούτου, η συνεισφορά ανά σαλάτα είναι 2€. Ο πίνακας απολαβών προκύπτει από τη σχέση: Απολαβές = Πωληθείσες σαλάτες*2 – Μη πωληθείσες*8 ή

Απολαβές= Ζήτηση*10-Προσφορά*8

	Ημερήσια Προσφορά			
Ημερήσια Ζήτηση	Π1(40 salads	Π2 (50 salads)	Π3 (60 salads)	Π4(70 salads)
Ζ1 (40 salads)				
Ζ2 (50 salads)				
Ζ3 (60 salads)				
Ζ4 (70 salads)				

Προκειμένου να βοηθήσετε τον Σεφ να αποφασίσει πόσες σαλάτες το πολύ θα πρέπει να προετοιμάζει για κάθε μέρα, να χρησιμοποιήσετε τα κριτήρια:

- **Μεγιστοποίησης των ελάχιστων απολαβών (maxi min - Wald)**
- **Μεγιστοποίησης των μέγιστων απολαβών (maxi max)**
- **Ελαχιστοποίησης των αναμενόμενων χαμένων ευκαιριών (min αναμενόμενων χαμένων ευκαιριών)**
- **Μεγιστοποίησης των αναμενόμενων απολαβών (max αναμενόμενων απολαβών-Laplace) με δεδομένο ότι η πιθανότητες για την ζήτηση είναι: Ζ1=0,10 Ζ2=0,20 Ζ3=0,40 και Ζ4=0,30.**

	Ημερήσια Προσφορά			
Ημερήσια Ζήτηση	Π1(40 salads	Π2 (50 salads)	Π3 (60 salads)	Π4(70 salads)
Z1 (40 salads)				
Z2 (50 salads)				
Z3 (60 salads)				
Z4 (70 salads)				

Βέλτιστη Λύση Π2

Z1Π1=40*2-0*8=80 Z2Π1=Z3Π1=Z4Π1=80
Z1Π2=40*2-10*8=0 Z2Π2=50*2-0*8=100 Z3Π2=Z4Π2=100
Z1Π3=40*2-20*8=-80 Z2Π3=50*2-10*8=20 Z3Π3=60*2-0*8=120 Z4Π3=120
Z1Π4=40*2-30*8=80-240=-160 Z2Π4=50*2-20*8=100-160=-60
Z3Π4=60*2-10*8=40 Z4Π4=70*2-0*8=140

Πίνακας Απολαβών	Ημερήσια Προσφορά			
Ημερήσια Ζήτηση	Π1(40 salads	Π2 (50 salads)	Π3 (60 salads)	Π4(70 salads)
Z1 (40 salads) 10%	80€	0€	-80€	-160€
Z2 (50 salads) 20%	80€	100€	20€	-60€
Z3 (60 salads) 40%	80€	100€	120€	40€
Z4 (70 salads) 30%	80€	100€	120€	140€
Αναμενόμενα Κέρδη	**80€**	**90€**	**80€**	**30€**

ΖΠ1=80*(0,1+0,2+0,4+0,3)=80*1=80   ΖΠ2=0*0,1+100*0,2+100*0,4+100*0,3=90
ΖΠ3=(-80)*0,1+20*0,2+120*0,4+120*0,3=80
ΖΠ4=(-160)*0,1+(60)*0,2+40*0,4+140*0,3=30

Κριτήρια max min και max max

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & \Pi 1 & \Pi 2 & \Pi 3 & \Pi 4 \\
\hline
Z1 & 80 & 0 & -80 & -160 \\
Z2 & 80 & 100 & 20 & -60 \\
Z3 & 80 & 100 & 120 & 40 \\
Z4 & 80 & 100 & 120 & 140
\end{array}
$$

Πίνακας Απολαβών

minΠ1=80 minΠ2=0 minΠ3=-80 minΠ4=-160
max-min(80, 0, -80, -160)= 80
Βέλτιστη Λύση: Π1

maxΠ1=80 maxΠ2=100 maxΠ3=120 maxΠ4=140
max-max(80, 100, 120, 140)=140
Βέλτιστη Λύση: Π4

Κριτήριο ελαχιστοποίησης των αναμενόμενων χαμένων ευκαιριών

$$\begin{array}{c|cccc} & \Pi 1 & \Pi 2 & \Pi 3 & \Pi 4 \\ \hline Z1 & 80 & 0 & -80 & -160 \\ Z2 & 80 & 100 & 20 & -60 \\ Z3 & 80 & 100 & 120 & 40 \\ Z4 & 80 & 100 & 120 & 140 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 80-80=0 & 80-0=80 & 80-(-80)=160 & 80-(-160)=240 \\ 100-80=20 & 100-100=0 & 100-20=80 & 100-(-60)=160 \\ 120-80=40 & 120-100=20 & 120-120=0 & 120-40=80 \\ 140-80=60 & 140-100=40 & 140-120=20 & 140-140=0 \end{bmatrix}$$

x1=0*0,1+20*0,2+40*0,4+60*0,3=38

x2=80*0,1+0*0,2+20*0,4+40*0,3=28

x3=160*0,1+80*0,2+0*0,4+20*0,3=38

x4=240*0,1+160*0,2+80*0,4+0*0,3= 88

Min(38, 28, 38, 88)=28

Βέλτιστη Λύση: Π2

Κριτήριο Μεγιστοποίησης των αναμενόμενων απολαβών-Laplace

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \Pi1 & \Pi2 & \Pi3 & \Pi4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Z1 \\ Z2 \\ Z3 \\ Z4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 80 & 0 & -80 & -160 \\ 80 & 100 & 20 & -60 \\ 80 & 100 & 120 & 40 \\ 80 & 100 & 120 & 140 \end{bmatrix} \end{array}$$

ΖΠ1=80*(0,1+0,2+0,4+0,3)=80*1=80

ΖΠ2=0*0,1+100*0,2+100*0,4+100*0,3=90

ΖΠ3=(-80)*0,1+20*0,2+120*0,4+120*0,3=80

ΖΠ4=(-160)*0,1+(60)*0,2+40*0,4+140*0,3=30

max(80, 90, 80, 30)=90

Βέλτιστη Λύση: Π2

Κριτήριο αισιοδοξίας- απαισιοδοξίας (Hurwicz)

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \Pi 1 & \Pi 2 & \Pi 3 & \Pi 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Z1 \\ Z2 \\ Z3 \\ Z4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 80 & 0 & -80 & -160 \\ 80 & 100 & 20 & -60 \\ 80 & 100 & 120 & 40 \\ 80 & 100 & 120 & 140 \end{bmatrix} \end{array}$$

Πίνακας Απολαβών

Έστω δείκτης αισιοδοξίας λ=0,7

80*0,7+80*0,3=80
100*0,7+0*0,3=70
120*0,7+(-80)*0,3=60
140*0,7+(-160)*0,3=50

Max(80, 70, 60, 50)=80

Βέλτιστη Λύση: Π1

Αναμενόμενη Αξία της Πλήρους Πληροφόρησης

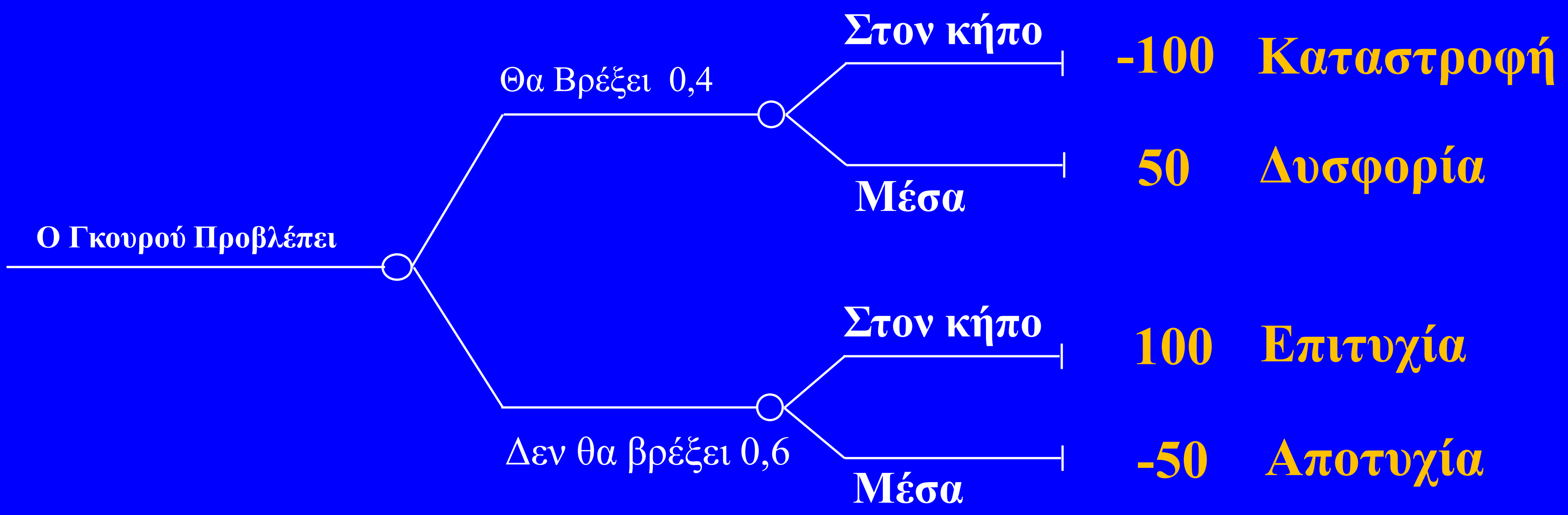
Δίλλημα: Να Διοργανώσουμε πάρτι μέσα ή στον κήπο;

Ένας Γκουρού της μετεωρολογίας ικανός να κάνει τέλειες προβλέψεις για τον καιρό δηλώνει:

1. Η πιθανότητα να βρέξει είναι 40%
2. Η πιθανότητα να μην βρέξει είναι 60%

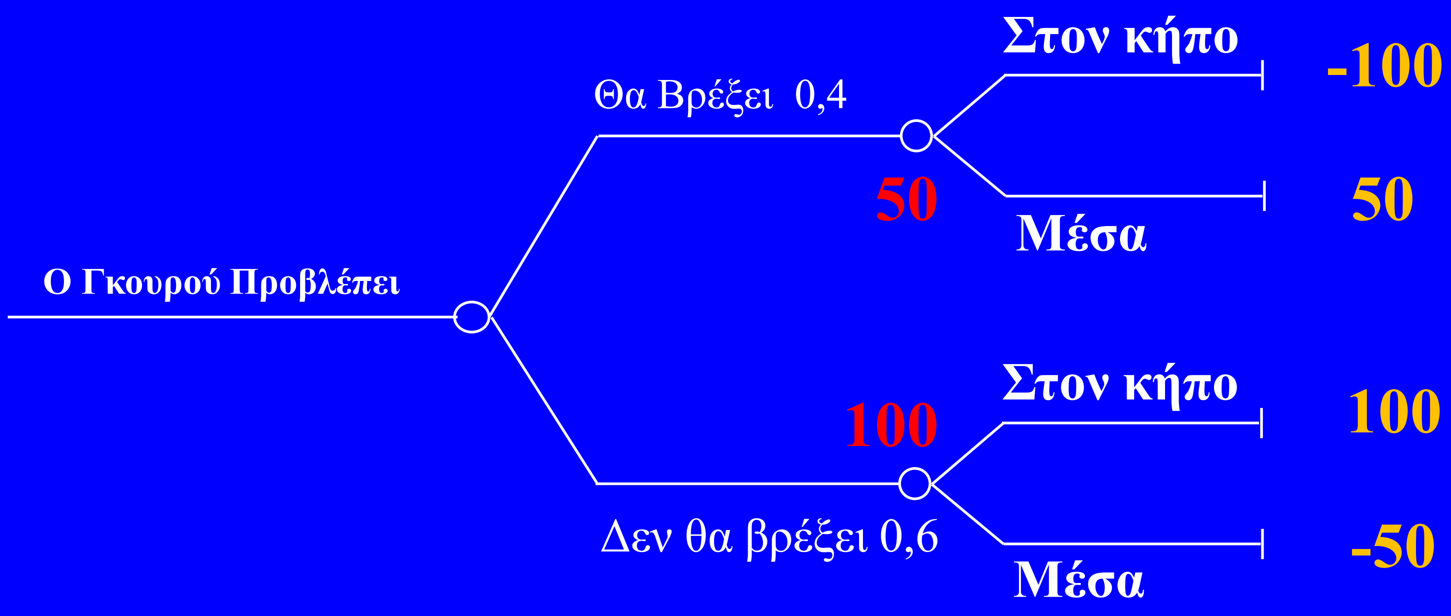
Ο Γκουρού έχει πάντα δίκαιο. Πόσα είστε διατεθειμένοι να πληρώσετε για αυτή την τέλεια πληροφορία;

Δίλημμα: Να Διοργανώσουμε πάρτι μέσα ή στον κήπο;



!!!! Αυτό το Δένδρο Αποφάσεων (decision tree) είναι διαφορετικό από το αντίστοιχο χωρίς την πληροφορία

Δίλημμα: Να Διοργανώσουμε πάρτι μέσα ή στον κήπο;



Αναμενόμενη Τιμή με πλήρη πληροφόρηση =50*0,4+100*0,6=80

Αναμενόμενη Τιμή χωρίς πλήρη πληροφόρηση =20

Αξία πλήρους πληροφόρησης = **80-20=60**

Γραμμικός Προγραμματισμός
Linear Programming

Γραμμικός Προγραμματισμός
Linear Programming (LP)

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι ένα ***μαθηματικό μοντέλο*** το οποίο χρησιμοποιείται για την εύρεση ***βέλτιστων λύσεων*** σε προβλήματα που μπορούν να εκφραστούν χρησιμοποιώντας ***γραμμικές εξισώσεις*** και ***ανισώσεις***. Εάν ένα πραγματικό πρόβλημα μπορεί να αναπαρασταθεί με ακρίβεια από τις μαθηματικές εξισώσεις ενός γραμμικού προγράμματος, η μέθοδος θα βρει την καλύτερη λύση στο πρόβλημα.

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι μια σχετική σύνθετη τεχνική που αποτελείται από ***μεταβλητές απόφασης (decision variables)***, μια ***αντικειμενική συνάρτηση (objective function)*** (ή συνάρτηση σκοπού) και ένα σύνολο ***περιορισμών (constraints)***.

Οι ***Μεταβλητές απόφασης*** ενός προβλήματος ΓΠ είναι ένα σύνολο ποσοτήτων που πρέπει να προσδιοριστούν για να λυθεί το πρόβλημα. Δηλαδή, το πρόβλημα λύνεται όταν έχουν προσδιοριστεί οι καλύτερες τιμές των μεταβλητών. Οι μεταβλητές ονομάζονται ***μεταβλητές απόφασης*** επειδή το πρόβλημα είναι να αποφασίσουμε ποια τιμή πρέπει να λάβει κάθε μεταβλητή. Συνήθως, οι μεταβλητές αντιπροσωπεύουν την ποσότητα ενός πόρου για χρήση ή το επίπεδο κάποιας δραστηριότητας.

Για παράδειγμα, μια μεταβλητή μπορεί να αντιπροσωπεύει τον αριθμό των δένδρων που πρέπει να κοπούν από ένα συγκεκριμένο μέρος του δάσους κατά τη διάρκεια μιας δεδομένης περιόδου. Συχνά, ο καθορισμός των μεταβλητών του προβλήματος είναι ένα από τα δυσκολότερα και/ή πιο κρίσιμα βήματα στη διαμόρφωση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

Αντικειμενική συνάρτηση είναι εκείνη η οποία εκφράζει το αντικείμενο το οποίο επιθυμούμε να βελτιστοποιήσουμε (να ελαχιστοποιήσουμε ή να μεγιστοποιήσουμε ανάλογα)

Περιορισμοί είναι ένα σύνολο αλγεβρικών ανισοτήτων ή ισοτήτων οι οποίες εκφράζουν τους περιορισμούς του επιχειρηματικού περιβάλλοντος

Τα βασικά βήματα στη διατύπωση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι:

- Ο προσδιορισμός των μεταβλητών απόφασης
- Η διατύπωση της αντικειμενικής συνάρτησης και
- Ο Προσδιορισμός και η διατύπωση των περιορισμών

Γραμμικός Προγραμματισμός

Το μοντέλο ονομάζεται μοντέλο Γραμμικού Προγραμματισμού διότι:

1. Η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί είναι γραμμικές συναρτήσεις ως προς τις άγνωστες μεταβλητές
2. Οι άγνωστες μεταβλητές είναι συνεχείς, δηλαδή μπορούν να λάβουν οποιαδήποτε τιμή σε ένα διάστημα πραγματικών αριθμών και
3. Η λύση του προβλήματος αποτελεί ένα πρόγραμμα δράσης προκειμένου να επιτευχθεί ο επιθυμητός στόχος.

Παράδειγμα 1: (Πραστάκος, 2019)

Μια επιχείρηση χρησιμοποιεί τρεις πρώτες ύλες Α, Β και Γ για να παράγει δύο προϊόντα Π1 και Π2. Σύμφωνα με τις προδιαγραφές παραγωγής, για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος Π1 πρέπει να χρησιμοποιηθούν 1 μονάδα Α, 1 μονάδα Β και 2 μονάδες Γ. Αντίστοιχα, μια μονάδα προϊόντος Π2 απαιτεί 2 μονάδες Α, 1 μονάδα Β και 1 μονάδα Γ. Η επιχείρηση διαθέτει αποθέματα ύψους 30, 20 και 36 μονάδων αντίστοιχα για τις τρεις πρώτες ύλες, τα δε προϊόντα Π1 και Π2 πωλούνται στην αγορά σε τιμές 200 και 300 € ανά μονάδα. Τα στοιχεία δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Πρώτη Ύλη	Προϊόντα		Αποθέματα
	Π1	Π2	
Α	1	2	30
Β	1	1	20
Γ	2	1	36
Τιμή πώλησης (€)	200	300	

Να βρεθούν οι ποσότητες των Π1 και Π2 οι οποίες πρέπει να παραχθούν ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό εισόδημα και οι ποσότητες πρώτων υλών Α, Β και Γ που χρησιμοποιήθηκαν.

Λύση:

1ο βήμα: Καθορισμός Μεταβλητών

Έστω χ_1 και χ_2 οι άγνωστες ποσότητες των Π_1 και Π_2 τις οποίες θέλουμε να προσδιορίσουμε

2ο βήμα: Καθορισμός Αντικειμενικής

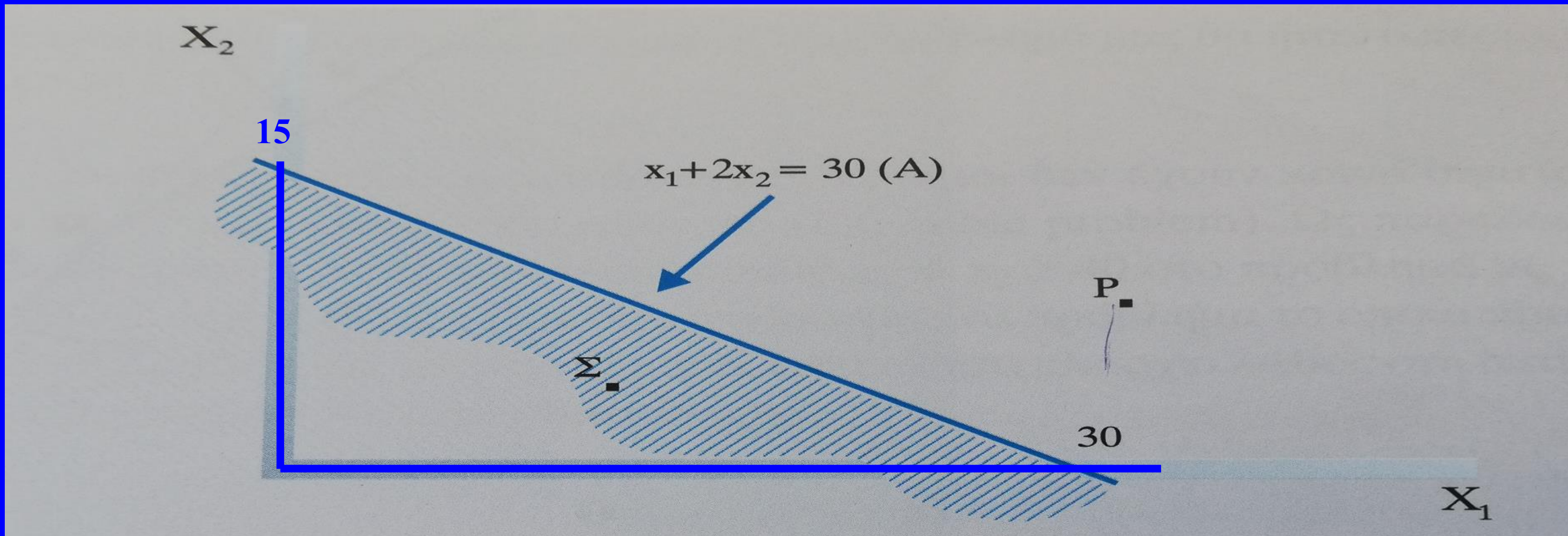
Το πρόβλημα είναι να ευρεθούν οι τιμές των χ_1 και χ_2 ώστε να μεγιστοποιηθεί το εισόδημα

$$\max(Z)=200\chi_1+300\chi_2$$

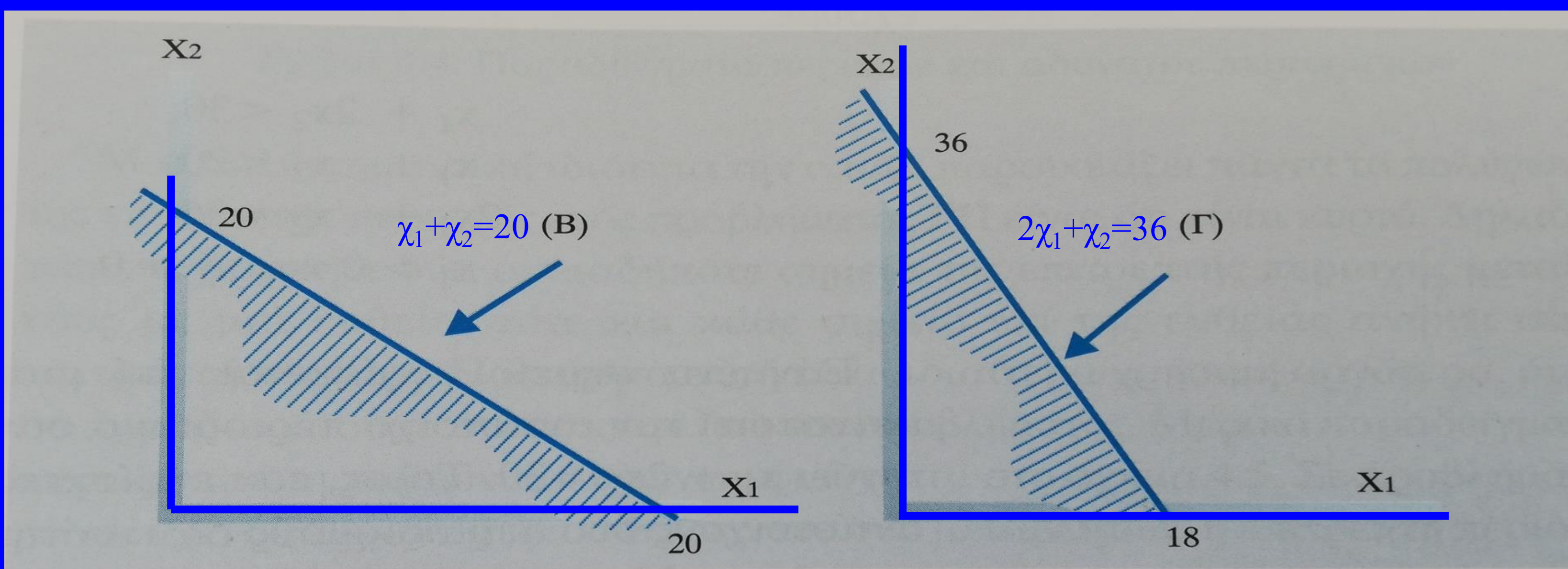
3ο βήμα: Καθορισμός Περιορισμών

$$\chi_1+2\chi_2<=30 \quad (A)$$
$$\chi_1+\chi_2<=20 \quad (B)$$
$$2\chi_1+\chi_2<=36 \quad (\Gamma)$$
$$\chi_1>=0,\ \chi_2>=0$$

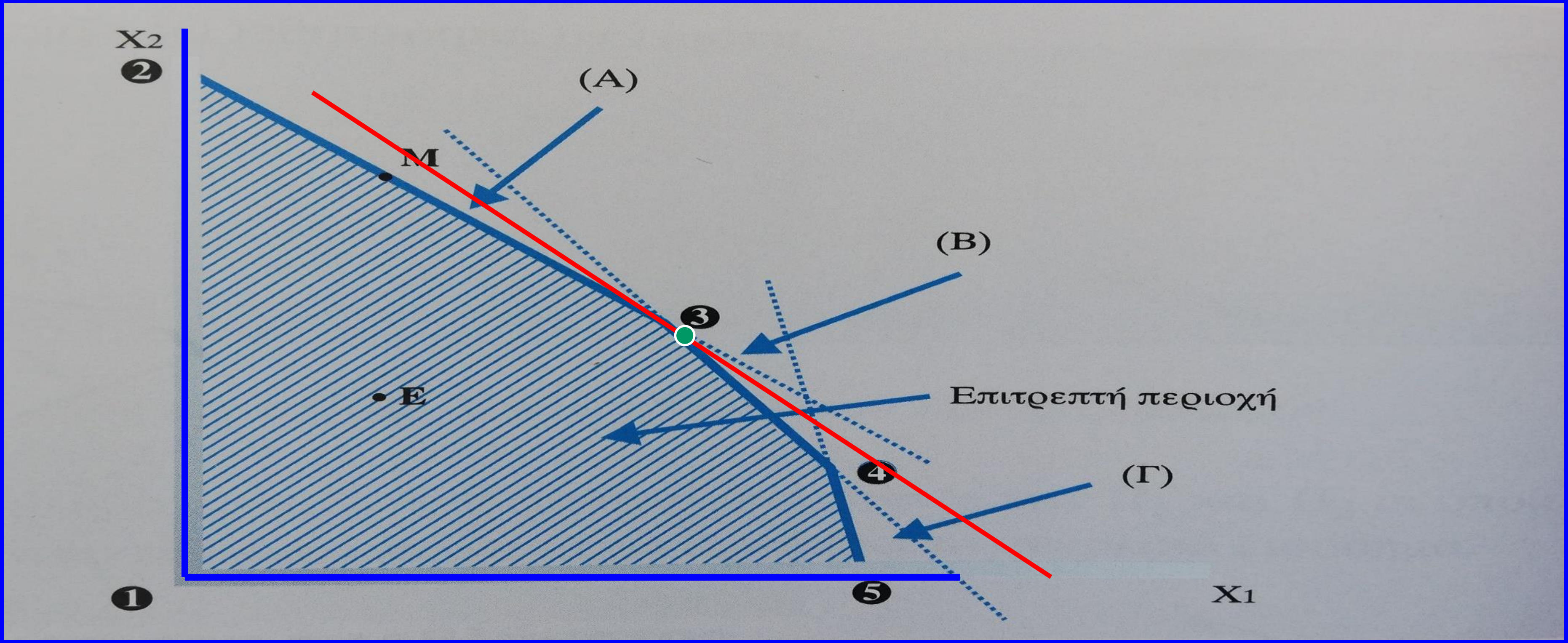
Γραφική Απεικόνιση του περιορισμού Α



Γραφική Απεικόνιση των περιορισμών Β και Γ



Γραφική Απεικόνιση των περιορισμών Α, Β, Γ.



Κάθε σημείο το οποίο βρίσκεται στο ***εσωτερικό*** ή στα ***σύνορα*** του πολυγώνου το οποίο αποτελεί την τομή όλων των περιορισμών ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς. Το πολύγωνο ονομάζεται επιτρεπτή περιοχή και περικλείεται από τις γωνίες 1,2,3,4,5 και 1.

Άριστη Λύση

Η ***άριστη λύση*** ενός προβλήματος ΓΠ είναι πάντα μια από τις κορυφές του κυρτού πολυγώνου το οποίο ορίζεται από τους περιορισμούς του προβλήματος.

Στο παράδειγμά μας, βλέπουμε ότι το τελευταίο σημείο στο οποίο η ευθεία της ***αντικειμενικής συνάρτησης*** αγγίζει το πολύγωνο της επιτρεπτής περιοχής είναι η κορυφή 3. Το σημείο αυτό αποτελεί και την ***άριστη λύση***.

Το σημείο 3 βρίσκεται στην τομή των ευθειών A και B:

$\chi_1+2\chi_2=30$ **(A)**

$\chi_1+\chi_2=20$ **(B)**

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει: $\chi_1=10$ ***και*** $\chi_2=10$

Συνεπώς η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο σημείο αυτό είναι:

Z=200*10+300*10=5.000€

Επομένως, η επιχείρηση πρέπει να παράγει ***10 μονάδες προϊόντος*** Π_1 και ***10 μονάδες προϊόντος*** Π_2 για να έχει το ***μέγιστο εισόδημα***.

Οι ποσότητες πρώτων υλών που χρησιμοποιήθηκαν είναι:

(Α) 10+2*10=30 (Β) 10+10=20 (Γ) 2*10+10=30

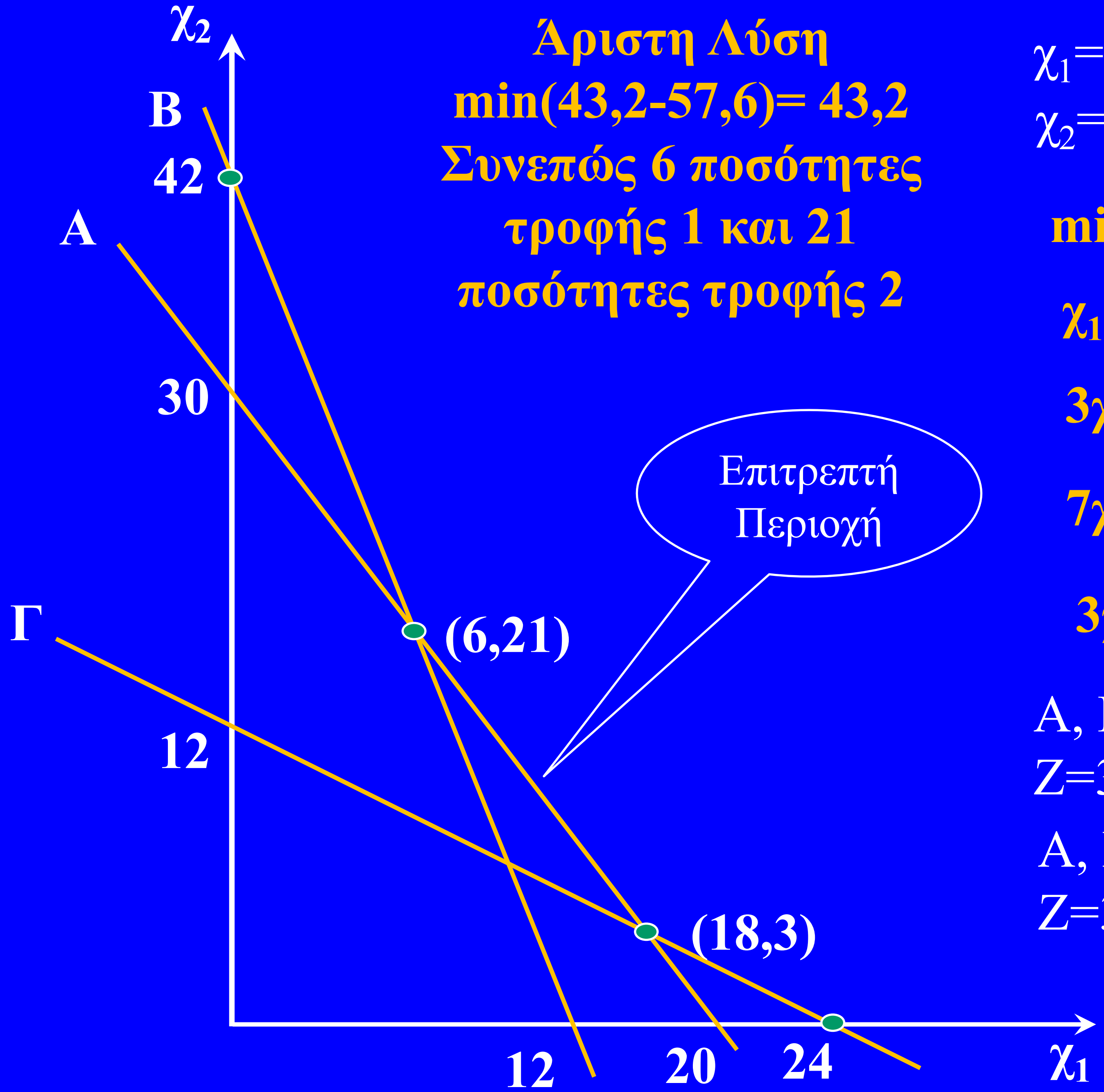
Παράδειγμα 2:

Ένας αγρότης βρίσκει στην αγορά δύο είδη τροφής για τα ζώα του. Γνωρίζει ότι αυτά χρειάζονται τουλάχιστον 60, 84 και 72 μονάδες από τα θρεπτικά συστατικά Α, Β και Γ αντίστοιχα, κάθε ημέρα. Ο πίνακας που ακολουθεί συνοψίζει την περιεκτικότητα σε θρεπτικά συστατικά και το κόστος της κάθε τροφής.

	Τροφή	
Θρεπτικά συστατικά (μονάδες/Kg)	Τροφή 1	Τροφή 2
Α	3	2
Β	7	2
Γ	3	6
Κόστος (€/Kg)	**3**	**1,2**

Ο αγρότης επιθυμεί να εκτιμήσει ποιες είναι οι καθημερινές ποσότητες από κάθε είδος τροφής που ελαχιστοποιούν το ημερήσιο κόστος τροφής ενώ συγχρόνως εξασφαλίζουν ότι τα ζώα παίρνουν τις απαιτούμενες ποσότητες θρεπτικών συστατικών. Περιγράψτε το πρόβλημα ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

Άριστη Λύση
min(43,2-57,6)= 43,2
Συνεπώς 6 ποσότητες τροφής 1 και 21 ποσότητες τροφής 2



χ_1=ποσότητα τροφής 1
χ_2=ποσότητα τροφής 2

$\min(Z)=3\chi_1+1{,}2\chi_2$

$\chi_1 >=0,\ \chi_2>=0$

$3\chi_1+2\chi_2>=60$ (A)

$7\chi_1+2\chi_2>=84$ (B)

$3\chi_1+6\chi_2>=72$ (Γ)

A, B (6, 21)
Z=3*6+1,2*21=43,2

A, Γ (18, 3)
Z=3*18+1,2*3=57,6

Παράδειγμα 3: Μία βιομηχανική μονάδα κατασκευής τηλεοράσεων παράγει τρία συμβατικά μοντέλα συσκευών (standard, delux και super) και ένα μοντέλο τελευταίας τεχνολογίας (high-tech). Η διοίκηση της επιχείρησης είναι βέβαιη ότι όλη η παραγωγή μπορεί να απορροφηθεί. Κάθε συσκευή περνά κατά τη διαδικασία παραγωγής της και από τα τρία τμήματα του εργοστασίου: το μηχανουργείο, το τμήμα συναρμολόγησης και τον τελικό έλεγχο. Το πλήθος των ανθρωποωρών εργασίας που απαιτούνται για κάθε τύπο συσκευής σε κάθε τμήμα παρατίθενται στον ακόλουθο πίνακα.

Τμήμα/Τύπος TV	STANDARD	DELUXE	SUPER	HIGH-TECH
Μηχανουργείο	12	15	15	25
Συναρμολόγηση	10	12	13	20
Έλεγχος	1/2	3/5	2	2

Η ολική δυναμικότητα της μονάδας καθώς και οι επιμέρους των τριών τμημάτων δεν επιτρέπουν πάνω από 2500, 3000 και 240 ανθρωποώρες ανά μέρα στο μηχανουργείο, στη συναρμολόγηση και στον έλεγχο αντίστοιχα. Επίσης λόγω ήδη υπαρχόντων υπογεγραμμένων συμβολαίων πρέπει να παράγονται κάθε μέρα τουλάχιστον 50 standard και 50 deluxe συσκευές. Η καθαρή συνεισφορά (τιμή πώλησης -συνολικό μοναδιαίο κόστος) από την πώληση μίας μονάδας κάθε συσκευής είναι:

	STANDARD	DELUXE	SUPER	HIGH-TECH
Κέρδος (€)	25	30	40	100

Να καταστρωθεί ένα μοντέλο Γραμμικού Προγραμματισμού προκειμένου να καθορισθεί το άριστο μίγμα παραγωγής

Παράδειγμα 4

Μια επιχείρηση παράγει τρία είδη λιπασμάτων ($Λ_1$,$Λ_2$,$Λ_3$) τα οποία πωλεί σε τιμές που φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί. Για την παραγωγή των προϊόντων απαιτούνται 4 πρώτες ύλες (άζωτο, φώσφορο, ποτάσα και σίδηρο). Οι μονάδες πρώτων υλών που απαιτούνται για την Παρασκευή των λιπασμάτων, οι ποσότητες που μπορεί να προμηθευτεί η επιχείρηση καθώς και η τιμή κάθε μονάδος παρουσιάζονται στον πίνακα. Η επιχείρηση ενδιαφέρεται να προσδιορίσει το άριστο ύψος παραγωγής που πρέπει να παράγει για κάθε λίπασμα ώστε να μεγιστοποιήσει τα συνολικά της κέρδη.

	Είδη Λιπασμάτων				
Απαιτούμενη Περιεκτικότητα σε:	Λ1	Λ2	Λ3	Διαθέσιμες Ποσότητες	**Κόστος Πρώτων Υλών (€)**
Άζωτο	0	2	3	5.000	**0,5**
Φώσφορο	5	2	1	20.000	**1,0**
Ποτάσα	4	4	6	20.000	**0,7**
Σίδηρο	0	0	2	10.000	**0,3**
Τιμή Πώλησης	**9,8€**	**8,8€**	**13,3€**		

1. Να προσδιοριστούν οι μεταβλητές του προβλήματος, η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί.
2. Αν η ιδανική λύση είναι: $Λ_1$=2500, $Λ_2$=0 και $Λ_3$=1666,67 να προσδιοριστούν το προβλεπόμενο συνολικό κέρδος και οι ποσότητες πρώτων υλών που περίσσεψαν.